目录

《线性代数：未竟之美》习题参考答案

第 1 讲　预备知识

A 组

2. (1) 不是;

   (2) 是, 矩形内平行于 y 轴的直线段, $S/R=\{$线段 $x=c(|y|\leq 1):|c|\leq 1\}$;

   (3) 是, 以原点为心的同心圆, $S/R=\{x^2+y^2=r^2|r\geq 0\}$;

   (4) 均不是;

   (5) 是, $S/R=\{$不含坐标轴的四个象限$\}$;

   (6) 是, $S/R=\{$复平面的左半平面和右半平面$\}$;

   (7) 是, $S/R=\{S_i|i=0,1,2,3,4\}, S_i$ 是含 i 个元素的子集组成的集合, $S_0=\{\emptyset\}$;

   (8) 是, $S/R=\{(m,n)\mid \frac{m}{n}=c|c\in\mathbb{Q}\}$.

3.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\2&1&3&5&-5\\1&-1&3&-2&-1\\3&1&5&6&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-6&2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

令 $x_3=k_1,x_4=k_2,x_5=k_3$，有 $x_1=-2k_1-k_2+2k_3$，$x_2=k_1-3k_2+k_3$，则

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$$

4.

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3&1\\2&-1&5&-9&8&-1\\3&-2&7&-11&11&0\\1&-1&1&-1&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3&1\\0&1&1&-5&2&-3\\0&1&1&-5&2&-3\\0&0&-1&1&0&2\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-2&3&1\\0&1&1&-5&2&-3\\0&0&-1&1&0&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-4&5&4\\0&1&0&-4&2&-1\\0&0&1&-1&0&-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

令 $x_4=k_1,x_5=k_2$，有 $x_1=4k_1-5k_2+4$，$x_2=4k_1-2k_2-1$，$x_3=k_1-2$，则

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}=k_1\begin{pmatrix}4\\4\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}\qquad k_1,k_2\in\mathbf{R}$$

5. 见教材 P33 例 3. 无解.

末竟专题一　预备思想

第 2 讲　线性空间

A 组

1. (1) 有理数集 Q 关于实数乘法不封闭，不构成实数域上的线性空间.

(2) $\mathbf{R}^2$ 关于通常向量加法构成交换群，封闭性也显然成立. 再看数乘.

i. $\exists\lambda = 1$ 使得 $\lambda\cdot(x,y) = (\lambda x, y) = (x,y)$.

ii. $\lambda(\mu\cdot(x,y)) = \lambda\cdot(\mu x, y) = ((\lambda\mu)x, y) = (\lambda\mu)\cdot(x,y)$.

iii. $(\lambda+\mu)\cdot(x,y) = ((\lambda+\mu)x, y) = (\lambda x, y) + (\mu x, y)$. 因此 $(\lambda+\mu)\cdot(x,y) = \lambda\cdot(x,y) + \mu\cdot(x,y)$ 成立.

iv. $\lambda((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = \lambda\cdot(x_1+x_2, y_1+y_2) = (\lambda x_1+\lambda x_2, y_1+y_2) = (\lambda x_1, y_1)+(\lambda x_2, y_2)$，因此 $\lambda((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = (\lambda x_1, y_1)+(\lambda x_2, y_2)$.

v.（封闭性）$\forall\lambda\in\mathbf{R}, \lambda\cdot(x,y) = (\lambda x, y)\in\mathbf{R}^2$，封闭性满足.

综上，$\mathbf{R}^2$ 关于通常向量加法与该数乘构成实数域上的向量空间.

(3) i. 对于加法, 显然, 封闭性, 结合律, 交换律成立. 存在加法单位元 $(1,1,\ldots,1)$ 有

$$\begin{aligned}(1,1,\ldots,1)+(a_1,a_2,\ldots,a_n) &= (a_1,a_2,\ldots,a_n)+(1,1,\ldots,1)\\ &= (a_1,a_2,\ldots,a_n)\end{aligned}$$

由于为正实数向量, 则对于 $(a_1,\ldots,a_n)$, 存在唯一的逆元 $\left(\dfrac{1}{a_1},\ldots,\dfrac{1}{a_n}\right)$, 使得 $(a_1,\ldots,a_n)+\left(\dfrac{1}{a_1},\ldots,\dfrac{1}{a_n}\right) = (1,\ldots,1)$.

ii. 对于数乘，显然有封闭性成立，乘法单位元为 $\lambda_0 = 1$. 又有

A.

$$\begin{aligned}&\lambda(\mu\cdot(a_1,\ldots,a_n))\\ &= \lambda\cdot(a_1^\mu,\ldots,a_n^\mu)\\ &= ((a_1^\mu)^\lambda,\ldots,(a_n^\mu)^\lambda)\\ &= (a_1^{\lambda\mu},\ldots,a_n^{\lambda\mu})\end{aligned}$$

因此 $\lambda(\mu\cdot(a_1,\ldots,a_n)) = (\lambda\mu)\cdot(a_1,\ldots,a_n)$ 成立.

B.

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)\cdot(a_1,\ldots,a_n)\\ &= (a_1^{\mu+\lambda},\ldots,a_n^{\mu+\lambda})\\ &= (a_1^\lambda a_1^\mu,\ldots,a_n^\lambda a_n^\mu)\\ &= (a_1^\lambda,\ldots,a_n^\lambda)+(a_1^\mu,\ldots,a_n^\mu),\end{aligned}$$

因此 $(\lambda+\mu)\cdot(a_1,\ldots,a_n)=\lambda\cdot(a_1,\ldots,a_n)+\mu(a_1,\ldots,a_n)$，第一个加号为数的加法，第二个加号为定义的向量加法.

C. $\lambda\cdot((a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n))=\lambda\cdot(a_1b_1,\ldots,a_nb_n)=(a_1^\lambda b_1^\lambda,\ldots,a_n^\lambda b_n^\lambda)=(a_1^\lambda,\ldots,a_n^\lambda)+(b_1^\lambda,\ldots,b_n^\lambda)$，因此 $\lambda\cdot((a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n))=\lambda\cdot(a_1,\ldots,a_n)+\lambda\cdot(b_1,\ldots,b_n)$.

综上有 $\mathbf{R}_+^n$ 对如下加法和数乘构成实数域线性空间.

(4) 当 $\lambda<0$ 时, $(\lambda\circ f)(x)=\lambda f(x)\leqslant 0$, 是函数值 ≤ 0 的实变量函数, 则 $\lambda f(x)\notin V$, 即关于数乘不封闭，不构成线性空间.

(5) V_1 是奇函数集合，只需验证 V_1 对加法和数乘封闭即可. 这显然成立. 则 V_1 构成线性空间. 对于 V_2：当 $\lambda\neq 1$，有 $(\lambda\circ f)(0)=\lambda f(0)=\lambda\neq 1$. 则 $(\lambda\circ f)(x)\in V_2$，$V_2$ 不封闭，不构成线性空间.

(6) 先验证 V 非空：有 $f(x)=0,\forall x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)\in V$，即 V 非空. 再验证封闭性：对于 $(f\oplus g)(x)$，有 $(f\oplus g)(-x)=f(-x)+g(-x)=\overline{f(x)}+\overline{g(x)}=\overline{f(x)+g(x)}=\overline{(f\oplus g)(x)}$. 对于 $(\lambda\circ f)(x)$，有 $(\lambda\circ f)(-x)=\lambda f(-x)=\lambda\overline{f(x)}$. 由于 $\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda\overline{f(x)}=\overline{\lambda f(x)}=\overline{(\lambda\circ f)(x)}$. 因此 V 关于 $\mathbf{R}$ 的函数加法和数乘封闭. 再给出加法零元 $f(x)=0$，数乘单位元 $\lambda=1$. 其余性质还请读者自行验证. 总之，V 构成 $\mathbf{R}$ 上线性空间.

2. (1) 对于集合 $W=\{(x_1,\ldots,x_n)\in F^n\mid a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\}$：

首先，我们来判断该集合是否为线性空间的子空间. 判断一个集合是否为线性空间的子空间需要满足以下三个条件：

i. 零向量在其中：

当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时，方程 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ 显然成立，因此零向量 $(0,0,\ldots,0)$ 属于 W.

ii. 封闭性（加法）：

假设 $\mathbf{v}=(x_1,\ldots,x_n)$ 和 $\mathbf{w}=(y_1,\ldots,y_n)$ 属于 W，即：

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\quad\text{且}\quad a_1y_1+\cdots+a_ny_n=0.$$

那么，对于 $\mathbf{v}+\mathbf{w}=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$，有：

$$a_1(x_1+y_1)+\cdots+a_n(x_n+y_n)=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+(a_1y_1+\cdots+a_ny_n)=0+0=0.$$

因此，$\mathbf{v}+\mathbf{w}\in W$.

iii. 封闭性（数乘）：

对于任意 $\mathbf{v}=(x_1,\ldots,x_n)\in W$ 和任意 $\lambda\in F$，有：

$$a_1(\lambda x_1)+\cdots+a_n(\lambda x_n)=\lambda(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)=\lambda\cdot 0=0.$$

因此，$\lambda\mathbf{v}\in W$.

由于上述三个条件均满足，集合 W 是 F^n 的一个子空间.

(2) 对于集合 $W_1 = \{(x,1,0) \in \mathbb{R}^3\}$ 和 $W_2 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$：

i. 对于 W_1：

- 零向量在其中：零向量 $(0,0,0)$ 不在 W_1 中，因为 W_1 中的第二个分量始终为 1，因此零向量不在 W_1 中.
- 因为零向量不在 W_1 中，所以 W_1 不是子空间.

ii. 对于 W_2：

- 零向量在其中：当 $x=0, y=0$ 时，向量 $(0,0,0) \in W_2$.
- 封闭性（加法）：假设 $\mathbf{v} = (x_1, y_1, 0) \in W_2$ 和 $\mathbf{w} = (x_2, y_2, 0) \in W_2$，则：

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W_2.$$

- 封闭性（数乘）：对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v} = (x, y, 0) \in W_2$，有：

$$\lambda\mathbf{v} = (\lambda x, \lambda y, 0) \in W_2.$$

因此，W_2 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间.

(3) 对于集合 $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}$ 和 $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 1\}$：

i. 零向量在其中：当 $x=0, y=0, z=0$ 时，方程 $x - 3y + z = 0$ 显然成立，因此零向量 $(0,0,0) \in W_1$.

ii. 封闭性（加法）：假设 $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1) \in W_1$ 和 $\mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2) \in W_1$，则：

$$(x_1 - 3y_1 + z_1) = 0 \quad 且 \quad (x_2 - 3y_2 + z_2) = 0.$$

对于 $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$，有：

$$(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 - 3y_1 + z_1) + (x_2 - 3y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0.$$

因此，$\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W_1$.

iii. 封闭性（数乘）：对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v} = (x, y, z) \in W_1$，有：

$$\lambda x - 3(\lambda y) + \lambda z = \lambda(x - 3y + z) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

因此，$\lambda\mathbf{v} \in W_1$.

综上所述，W_1 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间.

i. 零向量不在其中：若 $(0,0,0) \in W_2$，则必须满足 $0 - 3 \cdot 0 + 0 = 1$，这显然不成立，因此零向量不在 W_2 中.

因为零向量不在 W_2 中，所以 W_2 不是子空间.

(4) 对于集合 $W_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-1}{-3}\right\}$ 和 $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0, x+y+z=0\}$：

这个集合的方程表示一个直线的参数方程. 通常直线不是子空间，因为它不通过原点. 因此，W_1 不是子空间.

i. 零向量在其中：当 $x=0, y=0, z=0$ 时，方程 $x-y=0$ 和 $x+y+z=0$ 都成立，因此零向量 $(0,0,0) \in W_2$.

ii. 封闭性（加法）：假设 $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1) \in W_2$ 和 $\mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2) \in W_2$，即：

$$x_1 - y_1 = 0, \quad x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

$$x_2 - y_2 = 0, \quad x_2 + y_2 + z_2 = 0$$

对于 $\mathbf{v}+\mathbf{w} = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$，有：

$$(x_1+x_2) - (y_1+y_2) = (x_1-y_1) + (x_2-y_2) = 0+0 = 0$$

$$(x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2) = (x_1+y_1+z_1) + (x_2+y_2+z_2) = 0+0 = 0.$$

因此，$\mathbf{v}+\mathbf{w} \in W_2$.

iii. 封闭性（数乘）：对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v} = (x,y,z) \in W_2$，有：

$$\lambda x - \lambda y = \lambda(x-y) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

因此，$\lambda\mathbf{v} \in W_2$.

综上所述，W_2 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间.

(5) 对于集合 $W_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$ 和 $W_2 = \{P(x) \in \mathbb{R}[x]_n \mid p(1) = p(0)\}$：

i. 零多项式在其中：零多项式 $p(x) = 0$ 满足 $p(1) = 0$，因此零多项式 $p(x) = 0 \in W_1$.

ii. 封闭性（加法）：假设 $p(x), q(x) \in W_1$，即 $p(1) = 0$ 且 $q(1) = 0$，那么对于 $p(x)+q(x)$，有：

$$(p(x)+q(x))(1) = p(1) + q(1) = 0+0 = 0$$

因此 $p(x)+q(x) \in W_1$.

iii. 封闭性（数乘）：对于任意实数 λ 和 $p(x) \in W_1$，有：

$$(\lambda p(x))(1) = \lambda p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

因此 $\lambda p(x) \in W_1$.

综上所述，W_1 是一个子空间.

i. 零多项式在其中：零多项式 $p(x)=0$ 显然满足 $p(1)=p(0)$，因此零多项式 $p(x)=0\in W_2$.

ii. 封闭性（加法）：假设 $p(x),q(x)\in W_2$，即 $p(1)=p(0)$ 且 $q(1)=q(0)$，那么对于 $p(x)+q(x)$，有：

$$(p(x)+q(x))(1)=p(1)+q(1),\quad (p(x)+q(x))(0)=p(0)+q(0).$$

因为 $p(1)=p(0)$ 和 $q(1)=q(0)$，所以 $p(1)+q(1)=p(0)+q(0)$，即 $p(x)+q(x)\in W_2$.

iii. 封闭性（数乘）：对于任意实数 λ 和 $p(x)\in W_2$，有：

$$(\lambda p(x))(1)=\lambda p(1),\quad (\lambda p(x))(0)=\lambda p(0).$$

因为 $p(1)=p(0)$，所以 $\lambda p(1)=\lambda p(0)$，即 $\lambda p(x)\in W_2$.

综上所述，W_2 是一个子空间.

(6) 对于集合 $W=\{f\in F(-\infty,+\infty)\mid f(-x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}\}$：

i. 零函数在其中：零函数 $f(x)=0$ 显然满足 $f(-x)=f(x)$，因此零函数 $f(x)=0\in W$.

ii. 封闭性（加法）：假设 $f(x),g(x)\in W$，即 $f(-x)=f(x)$ 且 $g(-x)=g(x)$，那么对于 $f(x)+g(x)$，有：

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=(f+g)(x)$$

因此 $f(x)+g(x)\in W$.

iii. 封闭性（数乘）：对于任意实数 λ 和 $f(x)\in W$，有：

$$(\lambda f)(-x)=\lambda f(-x)=\lambda f(x)=(\lambda f)(x)$$

因此 $\lambda f(x)\in W$.

综上所述，W 是一个子空间.

B 组

2.

3. W 是 V 的子空间等价于 $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_k\in W$，$\forall\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbf{F}$（$\mathbf{F}$ 是 V 对应数域）有 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k\in W$. 根据线性扩张的定义，以上描述等价于 $\mathrm{span}(W)\subseteq W$，又 $\mathrm{span}(W)$ 是 W 的线性扩张，即 $W\subseteq\mathrm{span}(W)$，故 $\mathrm{span}(W)\subseteq W\iff\mathrm{span}(W)=W$. 综上 W 是 V 的子空间，得证.

C 组

1. (1) 此处仅验证数乘封闭性，其余性质留给读者. $\forall \alpha \in \mathbf{F}, \lambda \in \mathbf{E}$. 由于 $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{F}$，因此 $\lambda \in \mathbf{F}$. 由于 $\mathbf{F}$ 本身是封闭的，故 $\lambda\alpha \in F$，则 F 构成 $\mathbf{E}$ 上的线性空间. 例：$\mathbf{C}$ 构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

   (2) 例如：$\mathbf{R}$ 不是 $\mathbf{C}$ 上的线性空间. 因为 $\forall a \in \mathbf{R}$，有 $i \cdot a = a \cdot i \notin \mathbf{R}$. 故数乘不封闭，不构成线性空间.

   (3) $\forall \lambda \in \mathbf{E}$ 有 $\lambda \in \mathbf{F}$，则 V 关于 $\mathbf{E}$ 的数乘运算肯定是封闭的，其余性质与在 $\mathbf{F}$ 上一致. 又 $\mathbf{E}$ 本身也封闭，则 V 也是 $\mathbf{E}$ 上的一个线性空间，得证.

第 3 讲　有限维线性空间

A 组

1. (1) 错. 反例：$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(2,0),\alpha_3=(0,1)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关而 α_3 不是 $\alpha_1.\alpha_2$ 的线性组合.

(2) 对. 该命题的等价命题（逆否命题）是：若存在一个向量是其余向量的线性组合，则 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性相关. 这正是定理 3.1 的内容，因而成立.

(3) 错. 反例：$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(0,1),\alpha_3=(1,1)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两无关，而三者线性相关. 可证两两无关是向量组无关的必要条件.

(4) 错. 反例：$\alpha_1=(1,0),\alpha_2=(0,0),\beta_1=(0,0),\beta_2=(0,1)$，有 α_1,α_2 相关，β_1,β_2 相关，而 $\alpha_1+\beta_1$ 与 $\alpha_2+\beta_2$ 线性无关.

(5) 错. 若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，有

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n \implies \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0,$$

判断 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\ldots,\alpha_n+\alpha_1$ 是否无关. 设

$$\lambda_1'(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+\lambda_n'(\alpha_n+\alpha_1)=0,$$

则

$$(\lambda_n'+\lambda_1')\alpha_1+(\lambda_1'+\lambda_2')\alpha_2+\cdots+(\lambda_{n-1}'+\lambda_n')\alpha_n=0,$$

则

$$\begin{cases}\lambda_n'+\lambda_1'=0\\ \qquad\vdots\\ \lambda_{n-1}'+\lambda_n'=0\end{cases}.$$

解该方程可得 $\lambda_n'=(-1)^n\lambda_1'$，因此当 n 为偶数时，上述方程组有非零解，则向量组相关，而当 n 为奇数时，向量组无关. 综上，该命题不成立.

(6) 对. 由定理 3.1，不妨设 α_3 可由 α_1,α_2 线性表示，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 均可由 α_1,α_2 线性表示，再由定理 3.3 可知，$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性相关.

(7) 错. 反例：取 $\alpha_0=\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$，则 $\alpha_0+\alpha_1=(\alpha_0+\alpha_2)+(\alpha_0+\alpha_3)$，三者线性相关，不是 $\mathbf{R}^3$ 的基.

(8) 对. 判断 $\alpha_1+\alpha_2$ 与 $\alpha_1-\alpha_2$ 是否无关.

$$\lambda_1(\alpha_1+\alpha_2)+\lambda_2(\alpha_1-\alpha_2)=0,$$

则有 $(\lambda_1+\lambda_2)\alpha_1+(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2=0$, 则 $\lambda_1+\lambda_2=0,\lambda_1-\lambda_2=0 \implies \lambda_1=\lambda_2=0$, 因此线性无关且个数等于维数，是一组基.

(9) 错. 反例：$\mathbf{R}^2$ 中过原点的直线 L_0 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个子空间. 显然这样的直线有无数条.

(10) 错. 反例：$\mathbf{R}^3$ 中，子空间 $W_1 = \mathrm{span}(e_1, e_2)$，$W_2 = \mathrm{span}(e_1+e_2, e_3)$，则 $B_1 \cup B_2 = \{e_1, e_2, e_3, e_1+e_2\}$，显然 $\mathbf{R}^3$ 中的任一组基都不可能包含四个元素.

2. (1) 若向量组线性相关，则对应该方程组有无穷多解. 去掉 m 个分量，相当于删去该方程组中的任意 m 行方程，依然有无穷多解. 这是因为对于原方程组的任意一个解，将其带入被削减后的方程组也依然成立. 故线性相关得证.

(2) 若向量组线性无关，对应原方程组仅有唯一解，也就是全零解. 增加 m 个分量相当于增加 m 个方程，依然只有唯一解，因为若出现非零解，代入原方程组对应的方程中不会成立，矛盾. 故线性无关得证.

3. 方程组：$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$ 系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & a \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & -10 & a-6 \\ 0 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

仅全零解的条件是 $a \neq -2$，此时向量组线性无关.

4. (1) 必要性：$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关，对于 F^n 中的任一向量 β, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ 的向量个数大于维数 n，则线性相关. 由定理 3.2，β 可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 唯一表示.

(2) 充分性：由于 F^n 中任意向量均可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性表示，并且向量个数等于维数. 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 F^n 的一组基. 则 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关.

* 更详细的证明：对于 F^n 的一组基 $e_1, \ldots, e_n$，其可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 表示. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关，不妨设 α_n 可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ 表示，则有 $e_1, \ldots, e_n$ 可被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ 表示. 由于 $e_1, \ldots, e_n$ 线性无关. 根据定理 3.3，$n \leqslant n-1$，矛盾. 因此得证.

5. (1) 必要性：对于 $\forall v \in \mathrm{span}(S_1) \cap \mathrm{span}(S_2)$ 有 $v = a_1\alpha_1 + \cdots + a_s\alpha_s = b_1\beta_1 + \cdots + b_t\beta_t$. 由于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t$ 线性无关 $\implies a_1 = \cdots = a_s = b_1 = \cdots = b_t = 0$，则 $v = 0$，即 $\mathrm{span}(S_1) \cap \mathrm{span}(S_2) = \{0\}$.

(2) 充分性：考虑反证法. 如果 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_t$ 线性相关，则存在不全为零的系数使得 $a_1\alpha_1 + \cdots + a_s\alpha_s + b_1\beta_1 \cdots + b_t\beta_t = 0$. 因此存在一个向量 $v = a_1\alpha_1 + \cdots + a_s\alpha_s = -(b_1\beta_1 \cdots + b_t\beta_t) \neq 0$ 且 $v \in \mathrm{span}(S_1), v \in \mathrm{span}(S_2)$. 即存在非零向量 v 属于 $\mathrm{span}(S_1), v \in \mathrm{span}(S_2)$，矛盾！则充分性得证.

6. 设矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

(1) 对其进行倍乘行变换，即将第 i 行乘以 c，那么第 i 行会变为 $ca_{i1}, ca_{i2}, \ldots, ca_{in}$，而其他行不变. 记原先矩阵的列向量为 $S_A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，变换后的矩阵列向量为 $S_B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$.

先证 S_A 线性相关 $\Longrightarrow$ S_B 线性相关：若 S_A 线性相关，则存在不全为零的系数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$. 由于 S_B 与 S_A 只有第 i 行不同，我们仅需要判断第 i 行中的元素在系数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 下的线性组合是否为 0 即可. 事实上我们有 $x_1ca_{i1} + x_2ca_{i2} + \cdots + x_nca_{in} = c(x_1a_{i1} + x_2a_{i2} + \cdots + x_na_{in}) = 0$，故 S_B 线性相关.

再证 S_B 线性相关 $\Longrightarrow$ S_A 线性相关：若 S_B 线性相关，由于倍乘行变换保证 $c \neq 0$，故从 S_B 到 S_A 相当于做一次将第 i 行乘以 $\frac{1}{c}$ 的行变换，同理可得 S_A 线性相关.

因此，对矩阵做倍乘行变换不改变矩阵的列的线性相关性.

(2) 对其进行对换行变换，即将第 i 行与第 j 行交换，其他行不变. 记原先矩阵的列向量为 $S_A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$，变换后的矩阵列向量为 $S_B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$.

先证 S_A 线性相关 $\Longrightarrow$ S_B 线性相关：若 S_A 线性相关，则存在不全为零的系数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$. 由于 S_B 与 S_A 只有第 i 行与第 j 行不同，我们仅需要判断第 i 行与第 j 行中的元素在系数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 下的线性组合是否均为 0 即可. 事实上由原先第 i（j）行的元素在 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 下的线性组合为 0 即可得到变换后第 j（i）行的元素的线性组合为 0，故 S_B 线性相关.

再证 S_B 线性相关 $\Longrightarrow$ S_A 线性相关：若 S_B 线性相关，从 S_B 到 S_A 相当于再做一次相同的对换行变换，同理有 S_A 线性相关.

因此，对矩阵做对换行变换不改变矩阵的列的线性相关性.

7. (1) 也就是求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组. 利用讲义中所述求法：方程组

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_4\alpha_4 = 0$$

对应系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 \end{pmatrix}$. 化简为行阶梯型：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，因

此 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 有非零解，这四个向量线性相关.（其实此处已知矩阵秩为 3，即维数是 3）.

再选取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 来求解方程 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_4\alpha_4=0$：

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

因此该方程组只有全零解，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大线性无关组. 则 $\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)$ 的维数是 3. 一组基是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$.

(2) 也就是 $a_1\alpha_1+\cdots+a_4\alpha_4=\beta$ 有解：增广矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&a\end{pmatrix}$ 化为 $\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&-\frac{8}{3}&8\\0&0&0&0&a-9\end{pmatrix}$，若方程有解，则 $a=9$. 求坐标，取 $x_3=0$ 代入得 $\beta=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4$.

9. 只需证明 B 线性无关即可. $\lambda_1+\lambda_2(x_a)+\lambda_3(x-a)^2$ 求导，增加方程数得到

$$\lambda_2+2\lambda_3x=0,$$
$$2\lambda_3=0,$$

则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，线性无关得证. 又 B 中向量个数等于 $R[x]_3$ 维数. 则 B 是一组基. $1=1\cdot1+0\cdot(x-a)+0\times(x-a)^2$ ，即 $(1,0,0)$；$x=a\cdot1+1\cdot(x-a)+0\times(x-a)^2$ ，即 $(a,1,0)$；$x^2=a^2\cdot1+2a\cdot(x-a)+1\times(x-a)^2$ ，即 $(a^2,2a,1)$.

10. 等价于证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性无关. 即求解

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3+\lambda_4(\alpha_5-\alpha_4)=0. \tag{*}$$

由于 $r(A)=r(B)=3$ 可得 A 线性无关. B 线性相关. 由定理 3.2 得 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一表示：$\alpha_4=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3$. 则代入 (*) 式. 有

$$(\lambda_1-\mu_1\lambda_4)\alpha_1+(\lambda_2-\mu_2\lambda_4)\alpha_2+(\lambda_3-\mu_3\lambda_4)\alpha_3+\lambda_4\alpha_5=0,$$

因为 $r(C)=4$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关. 有 $\lambda_4=0,\lambda_1=\mu_1\lambda_4=0,\lambda_2=\mu_2\lambda_4=0,\lambda_3=\mu_3\lambda_4=0$. 故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性无关. 原题得证.

11. 相当于从 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 向量中选取 $s-m$ 个向量丢弃，剩余向量的秩：

$$r(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{im}) \geqslant r-(s-m)=r+m-s.$$

12. 方程：$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda_{n+1}\beta+\lambda_{n+2}\gamma=0$，显然 $\lambda_{n+1},\lambda_{n+2}$ 不全为零. 否则与 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性无关矛盾.

  (1) 若 $\lambda_{n+1}=0,\lambda_{n+2}\neq 0$，则 γ 可被 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 表示. 若 $\lambda_{n+1}\neq 0,\lambda_{n+2}=0$，则 β 可被 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 表示.

  (2) 若 $\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}\neq 0$ ，则有

$$\begin{aligned}\beta&=-\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda_{n+2}\gamma),\\ \gamma&=-\frac{1}{\lambda_{n+2}}(\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n+\lambda_{n+1}\beta).\end{aligned}$$

  两组向量可以相互表示. 两者等价. 综上原题得证.

B 组

1. 充分性显然成立，下证必要性：由于 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性相关，则存在 m，其能使得 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ 线性无关的最大下标，有 $1\leqslant m<n$. 因此 $i=m+1$，$\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1}$ 线性无关，$\alpha_1,\dots,\alpha_i$ 线性相关. 可得 α_i 可被 $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1}$ 唯一表示.

2. (1) 设 U 的一组基为 $u_1,\dots,u_m$，W 的一组基为 $w_1,\dots,w_n$. 由于 $U\subseteq W$，则 $u_1,\dots,u_m$ 可由 $w_1,\dots,w_n$ 线性表示，且 $u_1,\dots,u_m$ 线性无关. 由定理 3.3 的等价命题可得 $m\leqslant n$，则 $m=\dim U\leqslant\dim W=n$ 的得证.

  (2) 因为 $\dim U=\dim W$，则 $u_1,\dots,u_m$ 也是 W 的一组基. 则 W 的任意向量均可由 $u_1,\dots,u_m$ 表示，可得 $W\subseteq U$，而 $U\subseteq W$，故有 $U=W$ 得证.

3. 反证法. 若存在两个向量 α_i,α_j 可被前面的向量表示，即

$$\begin{aligned}\alpha_i&=\lambda_0\beta+\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{i-1}\alpha_{i-1},\\ \alpha_j&=\mu_0\beta+\mu_1\alpha_1+\cdots+\mu_{j-1}\alpha_{j-1}.\end{aligned}$$

如果 λ_0 或者 μ_0 为 0，则有向量组中的 α_i 或 α_j 可被其他向量线性表示，则该向量组相关，这与条件矛盾. 若 λ_0 与 μ_0 均不为 0，等式可化为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_0}\alpha_i&=\beta+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\alpha_1+\cdots+\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_0}\alpha_{i-1},\\ \frac{1}{\mu_0}\alpha_j&=\beta+\frac{\mu_1}{\mu_0}\alpha_1+\cdots+\frac{\mu_{j-1}}{\mu_0}\alpha_{j-1}.\end{aligned}$$

不妨设 $i > j$. 相减得

$$\frac{1}{\lambda_0}\alpha_i = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\mu_1}{\mu_0}\right)\alpha_1 + \cdots + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_0} + \frac{1}{\mu_0}\right)\alpha_j + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_0}\alpha_{i-1},$$

则 α_i 可被其他向量线性表示，因此向量组线性相关，与条件矛盾. 综上，至多有一个向量 α_i 可被前面的相邻线性表示.

4. 考虑使用求导构造更多方程.

$$\begin{cases} k_0 + k_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + k_2 \cdot e^{\lambda_2 x} = 0 \\ k_1\lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + k_2\lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 x} = 0 \\ k_1\lambda_1^2 \cdot e^{\lambda_1 x} + k_2\lambda_2^2 \cdot e^{\lambda_2 x} = 0 \end{cases},$$

由后两式可知 $k_1k_2(\lambda_1 - \lambda_0) = 0$. 又 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，故 $k_1 = k_2 = 0$，代回第一式得 $k_0 = 0$，则 $1, e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ 线性无关，得证.

5. 只需证明 α_r 可以被 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta$ 表示即可. 由于 β 是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ 的线性组合, 若 $\lambda_r = 0$, 则 β 是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$ 的线性组合. 这与条件矛盾. 因此 $\alpha_r = -\dfrac{1}{\lambda_r}(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_{r-1}\alpha_{r-1} - \beta)$，则这两组向量等价. $\mathrm{span}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r) = \mathrm{span}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \beta)$ 得证.

6. 分析该实线性空间，可以看出加法单位元为 1，数乘单位元为 1. 我们给出一组基：e，其中 e 为自然对数的底数. 当然, 2，3 或者 10 都可以作为一组基. 接下来我们验证 e 是 $\mathbf{R}^+$ 的基：$\forall a \in \mathbf{R}^+, \exists k = \ln a \in \mathbf{R}$，满足 $k \odot e = e^k = a$，则 $\mathrm{span}(e) = \mathbf{R}^+$ 成立. 由于该向量组只有一个元素，且并非设该空间的零元 1，则 e 是线性无关的. 得证.

C 组

1. (1) 若不全为 0. 不妨设设至少有 $k_i = 0$，则有 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_m\alpha_m = 0$，并且系数不全为 0. 因此 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ 这 $m-1$ 个向量相关，与题设矛盾. 则原题得证.

   (2) $l_1 \neq 0$，则 $l_2, \ldots, l_m$ 均不为 0.

   i. 若 $k_1 = \cdots = k_m = 0$. 原式显然成立.

   ii. 若 $k_1, \ldots, k_m$ 不全为 0. 则

$$l_1(k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m) = 0,$$
$$k_1(l_1\alpha_1 + \cdots + l_m\alpha_m) = 0.$$

   两式相减，得

$$(k_2l_1 - k_1l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_ml_1 - k_1l_m)\alpha_m = 0,$$

因为 $\alpha_2,\dots,\alpha_m$ 线性无关. 则以上系数均为 0. 故 $\dfrac{k_2}{l_2}=\dfrac{k_1}{l_1},\dots,\dfrac{k_m}{l_m}=\dfrac{k_1}{l_1}$. 得证.

2. 利用递推法: 当 $r=1$ 时, 由于 α_1 线性无关, 可得 $\alpha_1\neq 0$. 设 $\alpha_1=\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n$, 则至少存在一个 $\lambda_i\neq 0$, 不妨设 $\lambda_1\neq 0$, 因此有 $\beta_1=-\dfrac{1}{\lambda_1}(-\alpha_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_n\beta_n)$, 故 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 与 $\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 等价.

   当 $r=2$ 时, 由于 α_1,α_2 无关. 有 $\alpha_1\alpha_2\neq 0$. 根据 $r=1$ 的情况, 不妨设 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 与 $\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 等价. 因此 α_2 可由 $\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 表出:

$$\alpha_2=\mu_1\alpha_1+\mu_2\beta_2+\cdots+\mu_n\beta_n.$$

   由于 α_1,α_2 无关, 故 $\mu_2,\dots,\mu_n$ 至少有一个非零的数. 不妨设 $\mu_2\neq 0$, 同上可得 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_3,\dots,\beta_n$ 就与 $\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 等价, 也与 $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$ 等价. 综上, 通过递推可知, 对正整数 r, 上述结论依然成立.

3. (1) $\alpha=(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}},W=\operatorname{span}(\alpha)$, 显然 W 是满足条件的一维子空间.

   (2) 考虑反证法: 若 $\dim W>1$, 则 W 中存在线性无关的两向量. 由条件,

$$a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\neq 0,$$

   可设 $a_1=kb_1,k\in F$, 因此 $\alpha-k\beta=(0,a_2-kb-2,\dots,a_n-kb_n)^{\mathrm{T}}\in W$. 且由于 α,β 无关, $\alpha-k\beta\neq 0$ 但存在分量为 0, 这与条件矛盾. 故 $\dim W=1$.

   (3) 考虑反证法: 若 $\dim W>r+1$, 则存在 $r+2$ 个线性无关的向量, 设为

$$\begin{aligned}\alpha_1&=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1(r+1)},\dots,a_{1n})^{\mathrm{T}},\\&\vdots\\\alpha_{r+2}&=(a_{(r+2)1},a_{(r+2)2},\dots,a_{(r+2)(r+1)},\dots,a_{(r+2)n})^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

   取这些向量的前 $r+1$ 个分量组成新的向量组:

$$\begin{aligned}\beta_1&=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1(r+1)})^{\mathrm{T}},\\&\vdots\\\beta_{r+2}&=(a_{(r+2)1},a_{(r+2)2},\dots,a_{(r+2)(r+1)})^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

   由于 $\beta_1,\dots,\beta_{r+2}$ 是 $r+2$ 个 $r+1$ 维向量, 其必然线性相关, 则存在不全为 0 的系数 $\lambda_1,\dots,\lambda_{r+2}$, $\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_{r+2}\beta_{r+2}=0$. 由于 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r+2}$ 线性无关知: $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_{r+2}\alpha_{r+2}\neq 0$, 且其属于 W. 但其前 $r+1$ 个分量均为 0, 这与条件矛盾. 故 $\dim W\leqslant r+1$ 得证.

4. 先证明 $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间：

$\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 对通常的加法构成交换群以及其封闭性是显然的，在此不再赘述，下阐述数乘性质：

(1) $\forall v=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$，$1(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$；

(2) $\forall v=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}),\forall\lambda,\mu\in\mathbf{Q}$，$\lambda(\mu v)=(\lambda\mu)v$；

(3) $\forall v=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}),\forall\lambda,\mu\in\mathbf{Q}$，$(\lambda+\mu)v=(\lambda+\mu)a+(\lambda+\mu)b\sqrt[3]{2}+(\lambda+\mu)c\sqrt[3]{4}=\lambda(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})+\mu(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})=\lambda v+\mu v$；

(4) $\forall v=a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4},u=a_2+b_2\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}),\forall\lambda\in\mathbf{Q}$，$\lambda(v+u)=\lambda(a_1+a_2)+\lambda(b_1+b_2)\sqrt[3]{2}+\lambda(c_1+c_2)\sqrt[3]{4}=\lambda(a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4})+\lambda(a_2+b_2\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4})=\lambda v+\lambda u$；

(5)（封闭性）$\forall v=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}),\forall\lambda\in\mathbf{Q}$，$\lambda v=\lambda a+\lambda b\sqrt[3]{2}+\lambda c\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$.

故 $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间.

下求 $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 的维数. 考虑找 $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 的一组基，我们给出 $\{1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\}$，下证其为 $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 的一组基：

(1)（线性无关）令 $k_1+k_2\sqrt[3]{2}+k_3\sqrt[3]{4}=0$，其中 $k_1,k_2,k_3\in\mathbf{Q}$，由于左边只有第一项为有理数，故有 $k_1=0$，进而有 $\sqrt[3]{2}(k_2+k_3\sqrt[3]{2})=0$，又可得到 $k_2=0$，并且 $k_3=0$. 故 $\{1,\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\}$ 线性无关.

(2)（张成空间）由 $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 的定义易得.

综上，$\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ 是 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间，且 $\dim\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})=3$.

5. 取 $\mathbf{F}(\mathbf{K})$ 的一组基 $f_1,f_2,\dots,f_n$，$\mathbf{E}(\mathbf{F})$ 的一组基 $e_1,e_2,\dots,e_m$，下证向量组 $B=\{f_1e_1,f_2e_1,\dots,f_ne_1,f_1e_2,f_2e_2,\dots,f_ne_2,\dots,f_1e_m,f_2e_m,\dots,f_ne_m\}$ 是 $\mathbf{E}(\mathbf{K})$ 的一组基：

(1)（线性无关）令 $k_{11}f_1e_1+k_{12}f_2e_1+\cdots+k_{1n}f_ne_1+k_{21}f_1e_2+k_{22}f_2e_2+\cdots+k_{2n}f_ne_2+\cdots+k_{m1}f_1e_m+k_{m2}f_2e_m+\cdots+k_{mn}f_ne_m=0$，其中 $k_{ij}\in\mathbf{K}$，则

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}k_{ij}f_j\right)e_i=0.$$

由于 $e_1,e_2,\dots,e_n$ 是 $\mathbf{E}(\mathbf{F})$ 的一组基 $e_1,e_2,\dots,e_m$，我们有

$$\sum_{j=1}^{n}k_{ij}f_j=0,\ \forall i=1,2,\dots,m.$$

而 $f_1,f_2,\dots,f_n$ 又是 $\mathbf{F}(\mathbf{K})$ 的一组基，故 $k_{ij}=0$，即向量组 B 线性无关.

(2)（张成空间）$\forall e=\mu_1e_1+\mu_2e_2+\cdots+\mu_me_m\in\mathbf{E}$ $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m\in\mathbf{F})$, 由于 $\mu_i\in\mathbf{F}$, 故存在 $k_{ij}\in\mathbf{K}$ 使得 $\mu_i=k_{i1}f_1+k_{i2}f_2+\cdots+k_{in}f_n$，于是

$$e=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}k_{ij}f_j\right)e_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}f_je_i.$$

故 $e\in\operatorname{span}B$.

综上，B 是 $\mathbf{E}(\mathbf{K})$ 的一组基，故 $\dim\mathbf{E}(\mathbf{K})=mn$.

6.

第 4 讲　线性空间的运算

A 组

1. (1) 显然任意 $\alpha \in v, \beta \in w$, 有 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^4$ 成立，因此只需证明 v, w 封闭即可. 由于 v, w 内向量的约束条件都是齐次线性方程，封闭性自然满足，则 v, w 都是 $\mathbf{R}^4$ 的子空间.

   (2) i. $V \cap W = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0, a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 0\}$ 或者是 $\{(0, a, -a, 0) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$.

   ii. 由维数公式：$\dim V + \dim W = \dim(V \cap W) + \dim(V + W)$，易得 $\dim V = 3$，$\dim W = 2$，$\dim(V \cap W) = 1$，因此 $\dim(V + W) = 4$，则有 $V + W = \mathbf{R}^4$.

   iii. 先得到 W 的基：列出齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_1 - a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 - a_4 = 0 \end{cases}$$

高斯消元得到行阶梯矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

秩为 2，基分别为 $\beta_1 = (0, -1, 1, 0)$，$\beta_2 = (0, 1, 0, 1)$，则 W 的补空间维数是 $\dim \mathbf{R}^4 - \dim W = 2$.

利用基的扩张求其补空间的基. 也即求 $\beta_1, \beta_2, e_1, e_2, e_3, e_4$ 的极大无关组，其中 e_1, e_2, e_3, e_4 是自然基.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

则 $\beta_1, \beta_2, e_1, e_2$ 即是扩张后的基，因此 W 的补空间的一组基为 e_1, e_2.

2. (1) 先将各向量用坐标表示：

$$f_1 = (-1, 1, 0, 0), f_2 = (1, 0, -1, 0), f_3 = (1, 0, 0, -1)$$
$$g_1 = (0, 1, -1, 0), g_2 = (0, 1, 0, 1)$$
$$V_1 + V_2 = \operatorname{span}(f_1, f_2, f_3, g_1, g_2)$$

只需求 f_1,f_2,f_3,g_1,g_2 的极大线性无关组即可.

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

则极大线性无关组为 f_1,f_2,f_3,g_2，因此 V_1+V_2 的基为 f_1,f_2,f_3,g_2，维数为 4.

(2) 易得 $\dim V_1=3$, $\dim V_2=2$. 则 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)=1$. 只需找到属于 $V_1\cap V_2$ 的一个向量，其就是 $V_1\cap V_2$ 的基.

$$U=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3=\mu_1 g_1+\mu_2 g_2,$$

已知 g_1 可被 f_1,f_2,f_3,g_2 表示，则只需取 $\mu_1=1$，再求解其它系数即解得：

$$\lambda_1=1,\lambda_2=1,\lambda_3=0,\mu_2=0,$$

因此 $u=g_1=(0,1,-1,0)$ 或者 $x-x^2$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一组基.

(3) 只需求 g_1,g_2,e_1,e_2,e_3,e_4 的极大无关组即可.

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

则 g_1,g_2,e_1,e_2 是一组极大无关组. V_2 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 的补是 $\operatorname{span}(e_1,e_2)$ 其中 $e_1=1,e_2=x$.

3.

4.

5. **证:** 因为 V_1,V_2 是非平凡子空间, 所以存在 $\alpha\notin V_1$. 若 $\alpha\notin V_2$, 则命题得证; 若 $\alpha\in V_2$, 另有 $\beta\notin V_2$, 此时若 $\beta\notin V_1$, 命题也得证. 设 $\beta\in V_1$, 则 $\alpha\notin V_1,\alpha\in V_2,\beta\in V_1,\beta\notin V_2$. 考虑 $\alpha+\beta\in V_1$, 由 $\beta\in V_1\implies\alpha\in V_1$, 从而得出矛盾, 所以 $\alpha+\beta\notin V_1$. 类似可证 $\alpha+\beta\notin V_2$. 于是命题成立.

6. **证:** （归纳法）当 $r=2$ 时由上题知成立. 假设 $r=k-1$ 时也成立, 即存在 $\alpha\in V$ 使得 α 同时不属于 $V_i(i=1,2,\dots,k-1)$ 下面证明 $r=k$ 时也成立. 显然当此 $\alpha\notin V_k$ 则 α 即为所求. 若 $\alpha\in V_k$, 由于 V_k 是 V 的真子空间, 故有 $\beta\notin V_k$, 易知对任意 $V_i(i=1,2,\dots,k-1)$ 都至多有一个 k_i, 使得 $\beta+k_i\alpha\notin V_i; i=1,2,\dots,k-1$, 我们取异于 k_i 的数 k, 则必有 $\beta+k\alpha\notin V_i; i=1,2,\dots,k-1$. 又由于 $\alpha\in V_k,\beta\notin V_k$ 故有 $\beta+k\alpha\notin V_k$, 故 $\beta+k\alpha\notin V_k$ $(i=1,2,\dots,k)$.

B 组

1. (1) $V_1\cap V_2$ 即是两组方程组合并后的解空间.

$$\begin{pmatrix}3&4&-5&7\\4&11&-13&16\\2&-3&3&-2\\7&-2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&7&-8&9\\0&-17&19&-20\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则解向量 $u_1=\left(\frac{3}{17},\frac{19}{17},1,0\right)^{\mathrm{T}},u_2=\left(\frac{13}{17},-\frac{20}{17},0,1\right)^{\mathrm{T}}$. u_1,u_2 是 $V_1\cap V_2$ 的基，则其维数为 2.

(2) 易得 $\dim V_1=2,\dim V_2=2$，则由维数公式 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)=2$ 又 $V_1\cap V_2\subseteq V_1+V_2$，且二者维数相等. 则 $V_1\cap V_2=V_1+V_2$，亦即 $V_1=V_2$. 所以 V_1+V_2 的基也是 u_1,u_2，同 $V_1\cap V_2$.

2. 首先证明 (1) (2) 等价. 显然 (2) 可以直接推出 (1)，下证 (1) 可推出 (2) 成立. 反证法：若存在 $\alpha\in W_1$，有 $\alpha\notin W_2$，并且存在 $\beta\in W_2$, 有 $\beta\notin W_1$. 则 $\alpha\in W_1\cup W_2$，且 $\beta\in W_1\cup W_2$. 但 $\alpha+\beta\notin W_1$ 且 $\alpha+\beta\notin W_2$，即 $\alpha+\beta\notin W_1\cup W_2$. 这与 $W_1\cup W_2$ 是子空间矛盾. 因此任意 $\alpha\in W_1$, 有 $\alpha\notin W_2$，或者任意 $\beta\in W_2$, 有 $\beta\notin W_1$. 即 $W_1\subseteq W_2$ 或者 $W_2\subseteq W_1$.

接下来证明 (1) (3) 等价：显然 (3) 可以直接推出 (1)，下证 (1) 推出 (3) ：因为 $W_1\cup W_2$ 是 V 的子空间，对于 $\forall\alpha\in W_1,\forall\beta\in W_2,\alpha\in W_1\cup W_2$ 且 $\beta\in W1\cup W_2$，则 $\lambda\alpha+\mu\beta\in W_1\cup W_2$. 这与和空间的定义是完全一致的. 因此，$W_1\cup W_2=W_1+W_2$ 得证. 综上，以上三命题是等价的.

(2) (3) 的等价性留待读者自行验证，与证明 (1) (2) 等价是基本一致的.

3. 我们很自然地想到，可以任取 n 维空间 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$，然后取 $V_i=\operatorname{span}(\alpha_i)$. 如果 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$，我们就成功地为每个 n 维空间找到了写成 n 个一维子空间直和的分解形式. 下面我们来证明这一构造的正确性：

(1)

(2)

4. (1) 显然 $V_2\subseteq V$, 只需证明 V_2 封闭即可. 对于 $v=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n,v'=k_1'\alpha_1+\cdots+k_n'\alpha_n$. $\lambda v+\mu v'=(\lambda k_1+\mu k_1')\alpha_1+\cdots+(\lambda k_n+\mu k_n')\alpha_n$, 因此 $\lambda v+\mu v'\in V_2\in V_2$, V_2 封闭，则 V_2 是 V 的子空间.

(2) 设 $W=V_1+V_2$. 对任意 $v\in V_1,v=\lambda\alpha_1+2\lambda\alpha_2+\cdots+n\lambda\alpha_n$，则 $\lambda+2\dfrac{\lambda}{2}+\cdots+n\dfrac{\lambda}{n}=n\lambda$，因此当 $v\neq0$ 时，$v\notin v_2$，则 $V_1\cap V_2=\{0\}$，有 $W=V_1\oplus V_2$.

下证 $W=V$，易得 $\dim V_1=1$. 对于 V_2，写成坐标形式，则其是一个方程组的解空间，系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. 方程组为 $AK=0$，则 $\dim V_2=n-r(A)=n-1$，因此 $\dim W=\dim V_1+\dim V_2=n=\dim V$，又 $W\subseteq V$, 则 $W=V$ 得证，综上 $V=V_1\oplus V_2$.

6. (1) 法一：反证法. 如果 $\exists v_1\in V_1, v_1\notin V_2$, 且 $\exists v_2\in V_2, v_2\notin V_1$, 则有 $v_1,v_2\notin V_1\cap V_2$ 并且 v_1,v_2 线性无关. 设 $A=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基. 由基扩张，设 $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\dots,\alpha_{n+k}\}$ 是 V_1+V_2 的基. 由于 v_1,v_2 不在 $V_1\cap V_2$ 中，因此 A 无法表出 v_1,v_2. 则 $\alpha_1,\dots,\alpha_n,v_1,v_2$ 线性无关. 又 $v_1,v_2\in V_1+V_2$，则 $\alpha_1,\dots,\alpha_n,v_1,v_2$ 可由 $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+k}$ 线性表出. 由定理 3.3 得 $n+2\leqslant n+k$，即 $\dim(V_1+V_2)\geq\dim(V_1\cap V_2)+2$，这与条件矛盾. 因此，$\forall v_1\in V_1, v_1\in V_2$ 或 $\forall v_2\in V_2, v_2\in V_1$. 即 $V_1\subseteq V_2$ 或 $V_2\subseteq V_1$，得证.

   (2) 法二：维数公式. $\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=2\dim(V_1\cap V_2)+1$，即 $(\dim V_1-\dim(V_1\cap V_2))+(\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2))=1$. 于是，要么 $\dim V_1-\dim(V_1\cap V_2)=0$，要么 $\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)=0$，即 $V_1\subseteq V_2$ 或 $V_2\subseteq V_1$，得证.

7. (1) 正确，若 $\alpha\in V$，则 $\alpha\in V_1\cup V_2\cdots\cup V_s$，即 $\alpha\in V\cap(V_1\cup V_2\cdots\cup V_s)$，则 $\alpha\in(V\cap V_1)\cup\cdots\cup(V\cap V_s)$，则 $V\subseteq(V_1\cap V)\cup\cdots\cup(V_s\cap V)$. 另一边类似的同样成立，则有 $V=(V_1\cap V)\cup\cdots\cup(V_s\cap V)$ 得证.

   (2) 错误，反例：设 V_1,V_2,V_3 是平面 K 上三条过原点 O 的不重合直线，则 $V\subseteq K=V_1+V_2$，但 $V\cap V_1=\{0\}, V\cap V_2=\{0\}$，$V\neq(V\cap V_1)+(V\cap V_2)$.

8.

9. 设 A,B 为 V 的仿射子集, 若 A,B 交于一点 v, 则令 $\{0\}$ 为子空间，此时 $A\cap B=v+\{0\}$, 仍然是子空间，若至少有两点 $u,v\in A\cap B$, 则 $\forall u,v\in A\cap B$, 我们

$$\lambda u+(1-\lambda)v\in A$$
$$\lambda u+(1-\lambda)v\in B$$
$$\lambda u+(1-\lambda)v\in A\cap B$$

故 A,B 的交集是仿射子集. 空集的情况显然不必多说.

C 组

1. 由前 B 组第 8 题的证明可知 $W_0=(W_1\cap W_2)\cup\cdots\cup(W_s\cap W_0)$. 由于 $W_1\cap W_2\cdots W_s\cap W_0$ 都是 W_0 的子空间，根据覆盖定理，必存在 i，使得 $W_0=W_i\cap W_0$，即 $W_0\subseteq W_i$ 得证.

2.

3.

4. (1) 对于 $v=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_mv_m\in A$ 和 $w=\eta_1v_1+\cdots+\eta_mv_m\in A$, 且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{F}$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_m=1$, $\eta_1,\cdots,\eta_m\in\mathbf{F}$, $\eta_1+\cdots+\eta_m=1$. 对于任意的 $\lambda\in\mathbf{F}$, 我们有

$$\lambda v+(1-\lambda)w=\sum_{i=1}^{m}(\lambda\lambda_i+(1-\lambda)\eta_i)v_i.$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda\lambda_i+(1-\lambda)\eta_i)=\lambda\sum_{i=1}^{m}\lambda_i+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\eta_i=\lambda+(1-\lambda)=1,$$

我们有 $\lambda v+(1-\lambda)w\in A$. 故 A 是 V 的一个仿射子集

(2) 我们使用数学归纳法来证明, 对于任意 V 的仿射子集 W , 其包含 $v_1,\cdots,v_mk\leq m$, 如果 $\lambda_1+\cdots+\lambda_k=1$, 我们有

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_jv_j\in W.$$

当 $k=1$ 和 $k=2$ 时，结论是显然的. 假设 k 时成立, 接下来对于 $k+1$ $(k+1\leqslant m)$. 我们假设 $\lambda_1+\cdots+\lambda_{k+1}=1$. 若 $\lambda_{k+1}=1$, 那么

$$\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_jv_j=v_{k+1}\in W.$$

若 $\lambda_{k+1}\neq1$, 那么

$$\frac{1}{1-\lambda_{k+1}}(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)=1.$$

由归纳假设，我们有

$$\frac{1}{1-\lambda_{k+1}}(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k)\in W.$$

也有

$$(1-a_{k+1})\left(\frac{1}{1-\lambda_{k+1}}(\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_kv_k)\right)+a_{k+1}v_{k+1}\in W,$$

即
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{k+1} v_{k+1} \in W.$$
故而 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{F}$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$,
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \in W,$$
有 $A \subset W$.

(3) 注意到 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, 我们有
$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = v_1 + \lambda_2(v_2 - v_1) + \cdots + \lambda_m(v_m - v_1).$$
所以 $A \subset v_1 + \operatorname{span}(v_2 - v_1, \cdots, v_m - v_1)$. 类似的，对于任意
$$v \in v_1 + \operatorname{span}(v_2 - v_1, \cdots, v_m - v_1),$$
v 可以被写为
$$v_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i (v_i - v_1) = (1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_m) v_1 + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i v_i$$
对于 $\lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{F}$. 注意到
$$(1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_m) + \sum_{i=2}^{m} \lambda_i = 1,$$
可以推出 $v_1 + \operatorname{span}(v_2 - v_1, \cdots, v_m - v_1) \subset A$. 因此
$$A = v_1 + \operatorname{span}(v_2 - v_1, \cdots, v_m - v_1).$$
$v = v_1$ $U = \operatorname{span}(v_2 - v_1, \cdots, v_m - v_1)$, 有 $\dim U \leq m - 1$

第 5 讲　线性映射

A 组

1. $\sigma(W_1)$ 是 V_2 的子空间. $\forall v_1, v_2 \in \sigma(W_1)$, $\exists w_1, w_2 \in W_1$ 使得 $\sigma(w_1) = v_1$, $\sigma(w_2) = v_2$, 因此

$$\sigma(w_1 + w_2) = \sigma(w_1) + \sigma(w_2) = v_1 + v_2 \in \sigma(W_1),$$

$$\sigma(\lambda w_1) = \lambda\sigma(w_1) = \lambda v_1 \in \sigma(W_1),$$

因此 $\sigma(W_1)$ 是 V_2 的子空间.

$\sigma^{-1}(W_2)$ 是 V_1 的子空间. $\forall v_1, v_2 \in \sigma^{-1}(W_2)$，$\sigma(v_1), \sigma(v_2) \in W_2$，因此

$$\sigma(v_1 + v_2) = \sigma(v_1) + \sigma(v_2) \in W_2,$$

$$\sigma(\lambda v_1) = \lambda\sigma(v_1) \in W_2,$$

因此 $v_1 + v_2 \in \sigma^{-1}(W_2)$，$\lambda v_1 \in \sigma^{-1}(W_2)$，因此 $\sigma^{-1}(W_2)$ 是 V_1 的子空间.

2. (1) 使用数学归纳法证明即可.

(2) 由 $(\sigma+\tau)^2 = \sigma + \tau$,

$$(\sigma+\tau)^2 = \sigma^2 + +\sigma\tau + \tau\sigma + \tau^2 = \sigma + \tau$$

得

$$\sigma\tau + \tau\sigma = \theta \tag{.1}$$

式 .1 两边左乘 σ 得

$$\begin{aligned}\sigma(\sigma\tau + \tau\sigma) &= \sigma^2\tau + \sigma\tau\sigma = \sigma\theta \\ &= \sigma\tau + \sigma\tau\sigma = \theta\end{aligned} \tag{.2}$$

式 .1 两边右乘 σ 得

$$\begin{aligned}(\sigma\tau + \tau\sigma)\sigma &= \sigma\tau\sigma + \tau\sigma^2 = \theta\sigma \\ &= \sigma\tau\sigma + \tau\sigma = \theta\end{aligned} \tag{.3}$$

式 .3 减去式 .2 得

$$\sigma\tau - \tau\sigma = \theta \tag{.4}$$

由式 .1 与式 .4 得

$$\sigma\tau = \theta$$

(3) 若 $\sigma\tau=\tau\sigma$，则

$$
\begin{aligned}
&(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2\\
=&\sigma^2+\tau^2+2\sigma\tau-\sigma\tau\sigma-\sigma\tau^2-\sigma^2\tau-\tau\sigma\tau+\sigma^2\tau^2\\
=&\sigma+\tau+2\sigma\tau-\sigma\tau\sigma-\sigma\tau-\sigma\tau-\tau\sigma-\sigma\tau+\sigma\tau\\
=&\sigma+\tau-\sigma\tau
\end{aligned}
$$

3. 存在. 设

$$
\begin{aligned}
\sigma(1,-1,1)&=\sigma(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\\
&=\sigma(\boldsymbol{e}_1)-\sigma(\boldsymbol{e}_2)+\sigma(\boldsymbol{e}_3)\\
&=(1,0)=\boldsymbol{\varepsilon}_1
\end{aligned}
\tag{.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(1,1,1)&=\sigma(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\\
&=\sigma(\boldsymbol{e}_1)+\sigma(\boldsymbol{e}_2)+\sigma(\boldsymbol{e}_3)\\
&=(0,1)=\boldsymbol{\varepsilon}_2
\end{aligned}
\tag{.6}
$$

可取 $\sigma(\boldsymbol{e}_3)=(0,0)$. 联立item .5 与item .6 解得

$$
\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{e}_1)&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)\\
\sigma(\boldsymbol{e}_2)&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2)
\end{aligned}
$$

因此存在线性映射 $\sigma:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ 满足题设条件，其关于 $\mathbf{R}^3$ 基的像为

$$
\begin{aligned}
\sigma(\boldsymbol{e}_1)&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)\\
\sigma(\boldsymbol{e}_2)&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2)\\
\sigma(\boldsymbol{e}_3)&=(0,0)
\end{aligned}
$$

4. 不存在. 不存在从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的满射.

5.

$$\sigma(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1(1,0,\ldots,0)$$

所以

$$
\begin{aligned}
\sigma(V)&=\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1)\\
r(\sigma)&=1
\end{aligned}
$$

由于 $\sigma(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1$，$\sigma(\boldsymbol{e}_2)=\cdots=\sigma(\boldsymbol{e}_n)=\mathbf{0}$，所以

$$\ker\sigma=\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$$
$$\dim\ker\sigma=n-1$$

6. 其逆映射是同构映射是显然的. 我们只证明复合映射

   对于两个同构映射 $\sigma:V_1\to V_2,\tau:V_2\to V_3$，我们有其核空间 $\ker\sigma\tau$,τ 是单的，将 0 映射到 0，σ 也是单的，故 $\sigma\tau$ 是单的，将 0 映射到 0；σ 是满的，τ 也是满的，故 $\sigma\tau$ 是满的，故 $\sigma\tau$ 是双射，是同构映射.

   如果从矩阵的角度来理解：同构映射对应的矩阵是可逆矩阵；可逆矩阵的逆矩阵，可逆矩阵的乘积矩阵仍然是可逆矩阵.

7. 根据定义一一验证，只需要注意对于每一个位置的加法和数乘都是独立的即可.

B 组

1. 不存在. 假设存在，则由 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\mathbf{0}$ 有

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{0})&=\sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\\&=\sigma(\alpha_1)+\sigma(\alpha_2)+\sigma(\alpha_3)\\&=\beta_1+\beta_2+\beta_3=\mathbf{0}\end{aligned}$$

   这与 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=(2,2)$ 矛盾.

2. $\forall x_1,x_2,y_1,y_2,k_1,k_2\in\mathbf{F}$，有

$$\begin{aligned}&T(k_1(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2)+k_2(y_1\alpha_1+y_2\alpha_2))\\=&r_1(k_1x_1+k_2y_1)\alpha_1+r_2(k_1x_2+k_2y_2)\alpha_2\\=&k_1(r_1x_1\alpha_1+r_2x_2\alpha_2)+k_2(r_1y_1\alpha_1+r_2y_2\alpha_2)\\=&k_1T(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2)+k_2T(y_1\alpha_1+y_2\alpha_2)\end{aligned}$$

   因此 T 是线性映射. 其几何意义：将 $\mathbf{R}^2$ 中向量沿 x,y 轴分别变为原来的 r_1,r_2 倍.

3. (1)

$$\begin{aligned}\sigma^2(x_1,x_2)&=\sigma(\sigma(x_1,x_2))\\&=\sigma(x_1-x_2,x_1+x_2)\\&=((x_1-x_2)-(x_1+x_2),(x_1-x_2)+(x_1+x_2))\\&=(-2x_2,2x_1)\end{aligned}$$

(2) σ 可逆的充分必要条件是存在线性变换 τ 使得 $\sigma\tau = I$. 于是，$\forall\alpha \in \mathbf{R}^2$，令 $(\tau\sigma)(\alpha) = \alpha$，即

$$(\tau\sigma)(x_1, x_2) = \tau(x_1 - x_2, x_1 + x_2) = \tau(y_1, y_2) = (x_1, x_2)$$

解得

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

所以

$$\tau(x_1, x_2) = \sigma^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

(3) 当 $\xi = \theta$ 时，显然满足 $\xi\tau = \theta$. 当 $\xi \neq \theta$ 时，

$$\xi\tau(x_1, x_2) = \xi(x_1 - x_2, x_2 - x_1) = (0, 0)$$

记 $y_1 = x_1 - x_2$，$y_2 = x_2 - x_1$. 由于 $y_1 + y_2 = 0$，

$$\tau(y_1, y_2) = (y_1 + y_2, y_1 + y_2)$$

即 $\tau(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2)$ 满足 $\xi\tau = \theta$.

4. (1)

$$r(\theta) = 1$$
$$r(\tau) = 2$$
$$\operatorname{im}\theta = \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1)$$
$$\ker\theta = \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

(2)

$$(\sigma\tau)(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 0) = (0, 0, 0)$$
$$r(\sigma\tau) = 0$$

$$(\tau\sigma)(x_1, x_2, x_3) = \tau(x_3, 0, 0) = (x_3, x_3, 0)$$
$$\tau\sigma \neq \theta = \sigma\tau$$

求 $r(\tau\sigma)$，方法 1：

$$(\tau\sigma)(V) = \operatorname{span}((1, 1, 0))$$
$$r(\tau\sigma) = 1$$

方法 2：由 $\tau\sigma \neq \theta$ 知

$$1 \leqslant r(\tau\sigma) \leqslant \min\{r(\tau), r(\sigma)\} = 1$$

因此 $r(\tau\sigma) = 1$.

$$\begin{aligned}(\sigma+\tau)(x_1,x_2,x_3) &= \sigma(x_1,x_2,x_3) + \tau(x_1,x_2,x_3) \\ &= (x_1+x_2+2x_3, x_1-x_2, 0) \\ &= x_1(1,1,0) + x_2(1,-1,0) + x_3(2,0,0)\end{aligned}$$

$$r(\sigma+\tau) = r\{(1,1,0),(1,-1,0),(2,0,0)\} = 2$$

(3)

$$\begin{aligned}\operatorname{im}\tau &= \operatorname{span}((1,1,0),(1,-1,0),(2,0,0)) \\ &= \operatorname{span}((1,1,0),(1,-1,0)) \\ \ker\tau &= \operatorname{span}((1,1,-2))\end{aligned}$$

可得

$$\operatorname{im}\tau + \ker\tau = \operatorname{span}((1,1,0),(1,-1,0),(1,1,-2)) = \mathbf{R}^3$$

5. 使用反证法. 假设 $\alpha, \sigma(\alpha), \ldots, \sigma^{k-1}(\alpha)$ 线性相关，则存在不全为 0 的 $l_0, l_1, \ldots, l_{k-1}$ 使得

$$l_0\alpha + l_1\sigma(\alpha) + \cdots + l_{k-1}\sigma^{k-1}(\alpha) = \mathbf{0}$$

记 $i = \min\{k \mid l_k \neq 0\}$，则

$$l_i\sigma^i(\alpha) + l_{i+1}\sigma^{i+1}(\alpha) + \cdots + l_{k-1}\sigma^{k-1}(\alpha) = \mathbf{0}$$

两边同时作用 σ^{k-i-1}. 由于 $\sigma^k(\alpha) = \mathbf{0}$，故 $\sigma^{k+1}(\alpha) = \sigma^{k+2}(\alpha) = \cdots = \mathbf{0}$，上式成为

$$l_i\sigma^{k-1}(\alpha) = \mathbf{0}$$

而 $l_i \neq 0$，$\sigma^{k-1}(\alpha) \neq \mathbf{0}$，矛盾！

6. (1) 证明略, 根据定义直接套即可设

$$f(x) = ax^2 + bx + c, f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

解得

$$(a,b,c) = k_1(1,0,-1) + k_2(0,1,-1)$$

故

$$W = \operatorname{span}\{x^2-1, x-1\}, \dim W = 2$$

.

(2) 证明仍然是根据线性映射的定义验证即可，此处略去；$\ker T$ 即为第一问的 W,$\mathrm{im}\, T$=span$\{1\}$.

(3) 由于二维线性空间任意三个向量线性相关，$f, g, h \in W$ 故线性相关.

7. (1) 证明：$\forall p_1(x), p_2(x) \in \mathbf{R}[x]_n$，$\forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}\sigma(k_1p_1 + k_2p_2) &= (k_1p_1(x) + k_2p_2(x))' \\ &= k_1p_1'(x) + k_2p_2'(x) = k_1\sigma(p_1) + k_2\sigma(p_2)\end{aligned}$$

因此 σ 是 $\mathbf{R}[x]_n$ 上的线性变换.

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{im}\,\sigma &= \mathrm{span}(\sigma(1), \sigma(x), \sigma(x^2), \ldots, \sigma(x^{n-1})) \\ &= \mathrm{span}(1, 2x, \ldots, (n-1)x^{n-2}) \\ &= \mathrm{span}(1, x, \ldots, x^{n-2}) \\ r(\sigma) &= n - 1\end{aligned}$$

可知 σ 不是单射，因此不可逆.

(3) 由 $\sigma(p(x)) = 0$ 可知 $p(x) = c$（常数）. 因此 $\ker\sigma = \mathrm{span}(1)$，$\dim\ker\sigma = 1$.

(4)

$$\begin{aligned}r(\sigma) + \dim\ker\sigma &= (n-1) + 1 = n \\ \mathrm{im}\,\sigma + \ker\sigma &= \mathrm{span}(1, x, \ldots, x^{n-2}) = \mathrm{im}\,\sigma \neq \mathbf{R}[x]_n\end{aligned}$$

8. (1) 可能. 例如 $\sigma(x, y) = (x + y, x + y)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{im}\,\sigma &= \mathrm{span}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \\ \ker\sigma &= \mathrm{span}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) \\ \mathrm{im}\,\sigma \cap \ker\sigma &= \{\mathbf{0}\}\end{aligned}$$

(2) 可能. 例如 $\sigma(x, y, z) = (x - y, x - y, x - y)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{im}\,\sigma &= \mathrm{span}((1, 1, 1)) \\ \ker\sigma &= \mathrm{span}((1, 1, 1), (1, 1, 0)) \\ \mathrm{im}\,\sigma &\subseteq \ker\sigma\end{aligned}$$

(3) 可能. 例如 $\sigma(x, y) = (x - y, x - y)$.

$$\mathrm{im}\,\sigma = \ker\sigma = \mathrm{span}((1, 1))$$

(4) 可能. 例如 $\sigma(x,y)=(x,x-y)$.

$$\begin{gathered}\operatorname{im}\sigma=\mathbf{R}^2\\ \ker\sigma=\{\mathbf{0}\}\\ \ker\sigma\subseteq\operatorname{im}\sigma\end{gathered}$$

9. (1) 错误. 一个反例为 $\sigma(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1-x_2)$，则 $\operatorname{im}\sigma+\ker\sigma=\operatorname{span}((1,1))$.

(2) 正确. $\operatorname{im}\sigma+\ker\sigma\subseteq V$，此时 $\dim(\operatorname{im}\sigma+\ker\sigma)=\dim\operatorname{im}\sigma+\dim\ker\sigma-0=\dim V$，所以 $\operatorname{im}\sigma+\ker\sigma=V$.

(3) 错误. $\forall\alpha\in V$ 有

$$(\sigma_1+\sigma_2)(\alpha)=\sigma_1(\alpha)+\sigma_2(\alpha)\in\sigma_1(V)+\sigma_2(V)$$

所以

$$(\sigma_1+\sigma_2)(V)\subseteq\sigma_1(V)+\sigma_2(V)$$

但上式中等号不一定成立. 反例：$V=\mathbf{R}^3$ 上的线性变换 σ_1,σ_2 关于 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的像分别为

$$\begin{gathered}\sigma_1(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1,\ \sigma_1(\boldsymbol{e}_2)=\sigma_1(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_2\\ \sigma_2(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1,\ \sigma_2(\boldsymbol{e}_2)=\sigma_2(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_3\\ \sigma_1(V)=\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2),\ \sigma_2(V)=\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)\\ \sigma_1(V)+\sigma_2(V)=\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\mathbf{R}^3\end{gathered}$$

而

$$\begin{gathered}(\sigma_1+\sigma_2)(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1=2\boldsymbol{e}_1\\ (\sigma_1+\sigma_2)(\boldsymbol{e}_2)=(\sigma_1+\sigma_2)(\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\\ (\sigma_1+\sigma_2)(V)=\operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\neq\mathbf{R}^3\end{gathered}$$

(4) 错误. $(I-\sigma)(V)+\sigma(V)\subseteq V$，等号不一定成立，原因同 (3)，此时只需将 $I-\sigma$ 视作 σ_1，将 σ 视作 σ_2.

10. (1) 在. 因为

$$\sigma(\alpha_1)=-2\sigma(\sigma_2)+\sigma(\alpha_3)=\sigma(-2\alpha_2+\alpha_3)$$

同构映射 σ 可逆. 所以

$$\alpha_1=-2\alpha_2+\alpha_3\in\operatorname{span}(\alpha_2,\alpha_3)$$

(2) 对于注意力惊人的同学，直接观察当然可得答案；如果没什么思路，我们可以先从定义入手；由于同构是将基映射到基的，我们可以将对于 α 的操作看做对于其像的操作，为了方便，在这里直接用 a 来代替 α 的像，若 $\beta \in W_1 \cap W_2$，则

$$\beta = x_1a_1 + x_2a_2 = x_3'a_3 + x_4'a_4 \implies x_1a_1 + x_2a_2 - x_3'a_3 - x_4'a_4 = 0$$

改写 x_3', x_4' 为 x_3, x_4，则转换为

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = 0$$

对应的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

四个未知数，三个方程，解得其基础解系为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

故 $\beta = k(-a_1 + -2a_2 = -a_3)$ 其中 $k \in \mathbf{R}$. 故所求交空间的基为 α_3(注意要对应回 $V(R)$ 中)

11. 我们仅对 $n = 3$ 的情况给出证明.

先证 σ 是线性映射. $\forall p(x), q(x) \in \mathbf{R}[x]_3$，$\forall k_1, k_2 \in \mathbf{R}$ 有

$$\begin{aligned} &\sigma(k_1p(x) + k_2q(x)) \\ =& (k_1p(c_1) + k_2q(c_1), k_1p(c_2) + k_2q(c_2), k_1p(c_3) + k_2q(c_3)) \\ =& k_1(p(c_1), p(c_2), p(c_3)) + k_1(q(c_1), q(c_2), q(c_3)) \\ =& k_1\sigma(p(x)) + k_2\sigma(q(x)) \end{aligned}$$

再证 σ 是双射，即 $\forall (d_1, d_2, d_3) \in \mathbf{R}^3$，存在唯一的

$$p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbf{R}[x]_3$$

使 $\sigma(p(x)) = (d_1, d_2, d_3)$. 根据

$$\sigma(p(x)) = (p(c_1), p(c_2), p(c_3))$$

以及 $\sigma(p(x)) = (d_1, d_2, d_3)$，有

$$\begin{cases} a + bc_1 + cc_1^2 = d_1 \\ a + bc_2 + cc_2^2 = d_2 \\ a + bc_3 + cc_3^3 = d_3 \end{cases}$$

方程组是关于未知元 a,b,c 的三元线性非齐次方程组，其中 c_1,c_2,c_3 是互异的实常数. 用高斯-若当消元法，易将其增广矩阵变换为下列阶梯形矩阵，即

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c_1 & c_1^2 & d_1 \\ 1 & c_2 & c_2^2 & d_2 \\ 1 & c_3 & c_3^3 & d_3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c_1 & c_1^2 & d_1 \\ 0 & 1 & c_2+c_1 & \dfrac{d_1-d_2}{c_1-c_2} \\ 0 & 0 & c_3-c_2 & \dfrac{d_3-d_1}{c_3-c_1}-\dfrac{d_2-d_1}{c_2-c_1} \end{array}\right) \tag{.7}$$

阶梯性矩阵 .7（其中 $c_3-c_2, c_3-c_1, c_2-c_1$ 均为非零常数）对应的方程组有唯一解 a,b,c，即存在唯一的

$$p(x)=a+bx+cx^2\in\mathbf{R}[x]_3$$

使得 $\sigma(p(x))=(d_1,d_2,d_3)$ 成立. 所以 σ 是线性双射，即 $\mathbf{R}[x]_3$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的同构映射.

12. 我们先观察等式的右边，在 $\ker\tau\sigma$ 中的元素 u, 会满足 $\tau\sigma(u)=0$, 仔细想想什么元素会满足这个式子

- $\sigma(u)=0$ 的元素，亦即 $u\in\ker\sigma$；
- $v=\sigma(u)\neq 0$，但是 $\tau(v)=0$ 的元素，亦即 $v\in\operatorname{im}\sigma\cap\ker\tau$.

这恰好对应左边的两项，所以等式显然是成立的.

C 组

1. (1) $\mathcal{L}(V,V)$ 是 n^2 维线性空间，其中 n^2+1 个元素 $I,\sigma,\sigma^2,\ldots,\sigma^{n^2}$ 线性相关，即 $\exists a_i\ \ (i=1,2,\ldots,n^2)$ 使得

$$a_0I+a_1\sigma+\ldots+a_{n^2}\sigma^{n^2}=\theta$$

于是 $\exists p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{n^2}x^{n^2}\in\mathbf{F}[x]$ 使得 $p(\sigma)=\theta$.

(2) 必要性：设有一常数项不为 0 的多项式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k\qquad a_0\neq 0$$

满足

$$p(\sigma)=a_0I+a_1\sigma+\cdots+a_k\sigma^k=\theta$$

所以

$$\sigma(a_1I+a_2\sigma+\cdots+a_k\sigma^{k-1})=-a_0I$$

因此

$$\sigma^{-1} = -a_0^{-1}(a_1 I + a_2\sigma + \cdots + a_k\sigma^{k-1})$$

充分性：由 (1) 可知存在次数 $k \leqslant n^2$ 的多项式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$$

满足

$$p(\sigma) = a_0 I + a_1\sigma + \cdots + a_k\sigma^k = \theta$$

若 $a_0 \neq 0$，则 $p(x)$ 即为所求多项式.

若 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{i-1} = 0$，$a_i \neq 0$，即

$$a_i I + a_{i+1}\sigma + \cdots + a_k\sigma^{k-i} = \theta$$

于是

$$P(x) = a_i + a_{i+1}x + \cdots + a_k x^{k-i} \qquad a_i \neq 0$$

为所求的多项式.

2. $\alpha \in V$ 使得 $\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha)$ 当且仅当 $\alpha \notin \ker(\sigma_i - \sigma_j)$, 我们可以只考虑该核空间不是零空间的情况，因为我们所取出的 α 显然不可能是零，又因为我们的线性映射是两两不相同的，所以该核空间一定是一个真子空间，对于 m 个非平凡子空间，我们总可以取到一个不属于任意一个这些子空间的向量 (相关的习题在第四章 A 组第 5 题已经给出)item 4，这样我们就找到了所需要的 α

3. 证明: 必要性: $\forall \alpha \in V$, 由 σ 可逆, 存在唯一的 $\beta \in V$ 使得 $\sigma(\beta) = \alpha$ 且 $\beta = \beta_1 + \beta_2$, 其中 $\beta_1 \in W_1$，$\beta_2 \in W_2$. 于是

$$\alpha = \sigma(\beta) = \sigma(\beta_1) + \sigma(\beta_2) \in \sigma(W_1) + \sigma(W_2)$$

所以 $V \subseteq \sigma(W_1) + \sigma(W_2)$.

$\sigma(W_1), \sigma(W_2)$ 都是 V 的子空间，它们的和也是 V 的子空间. 所以 $\sigma(W_1) + \sigma(W_2) \subseteq V$，故 $V = \sigma(W_1) + \sigma(W_2)$.

充分性: $\forall \alpha \in V = \sigma(W_1) + \sigma(W_2)$, $\exists \alpha_i \in \sigma(W_i)$ 且 $\exists \beta_i \in W_i$ 使 $\alpha_i = \sigma(\beta_i)$ $(i = 1, 2)$ 使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \sigma(\beta_1) + \sigma(\beta_2) = \sigma(\beta_1 + \beta_2) = \sigma(\beta)$$

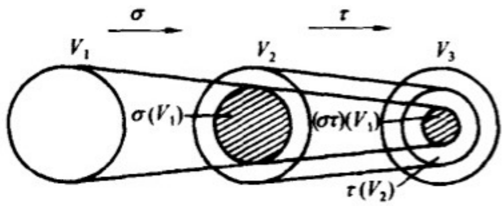
其中 $\beta = \beta_1 + \beta_2 \in W_1 + W_2 = V$，所以 σ 为满射.

由于 n 维线性空间上的线性映射为满射时也必为单射，从而必是双射，所以 σ 可逆.

4. 证明：先证右边. 由于 $\sigma(V_1)\subseteq V_2$，所以 $(\tau\sigma)(V_1)\subseteq\tau(V_2)$，如下图所示. 因此

$$\dim(\tau\sigma)(V_1)\leqslant\dim\tau(V_2)$$

即 $r(\tau\sigma)\leqslant r(\tau)$.



又因为 $(\tau\sigma)(V_1)=\tau(\sigma(V_1))$，所以又有

$$\dim(\tau\sigma)(V_1)\leqslant\dim\sigma(V_1)$$

即 $r(\tau\sigma)\leqslant r(\sigma)$.

再证左边. 由线性映射维数公式，

$$r(\tau)+\dim\ker\tau=n$$
$$r(\tau\sigma)+\dim\ker(\tau\sigma)=m$$

又 $\dim\ker(\tau\sigma)\leqslant\dim\ker\tau$，所以

$$m-r(\tau\sigma)=\dim\ker(\tau\sigma)\leqslant\dim\ker\tau$$

代入线性映射维数公式，得 $\dim\ker\tau=n-r(\tau)\geqslant m-r(\sigma)$，即

$$\begin{aligned}r(\tau\sigma)&\geqslant m+r(\tau)-n\\&\geqslant r(\sigma)+r(\tau)-n\end{aligned}$$

5. 证明：由于 $\forall\beta\in(\sigma+\tau)(V_1)$，$\exists\alpha\in V_1$ 使 $\beta=(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha)\in\sigma(V_1)+\tau(V_1)$，所以

$$(\sigma+\tau)(V_1)\subseteq\sigma(V_1)+\tau(V_1)$$

因此

$$\begin{aligned}\dim(\sigma+\tau)(V_1)&\leqslant\dim(\sigma(V_1)+\tau(V_1))\\&\leqslant\dim\sigma(V_1)+\dim\tau(V_1)\end{aligned}$$

6. (1) $\forall \sigma \in \mathcal{L}(V,V)$，则 $I-\sigma \in \mathcal{L}(V,V)$. $\forall \alpha \in (I-\sigma)(V)$，$\exists \beta \in V$，有

$$\alpha = (I-\sigma)(\beta) = \beta - \sigma(\beta)$$
$$\sigma(\alpha) = \sigma(\beta - \sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - \sigma^2(\beta)$$

而由于 $\sigma^2 = \sigma$，所以 $\sigma(\alpha) = \mathbf{0}$，于是 $\alpha \in \ker \sigma$，因此 $(I-\sigma)(V) \subseteq \ker \sigma$.

(2) 利用 $r(\sigma+\tau) \leqslant r(\sigma) + r(\tau)$ 和 $r(\sigma) + \dim \ker \sigma = n$，由 **??** 可得

$$r(I-\sigma) + r(\sigma) \leqslant n \tag{.8}$$

又因为

$$r(I-\sigma) + r(\sigma) \geqslant r(I-\sigma+\sigma) = r(I) = n \tag{.9}$$

于是由式 .8 和式 .9 即可得到 $r(I-\sigma) + r(\sigma) = n$.

7. 证明：

(1) $\forall \alpha \in \operatorname{im} \sigma$，$\exists \beta \in V$ 使得 $\sigma(\beta) = \alpha$. 由 $\sigma^2 = \theta$ 可得 $\sigma(\alpha) = \sigma^2(\beta) = \mathbf{0}$，因此 $\alpha \in \ker \sigma$，从而 $\operatorname{im} \sigma \subseteq \ker \sigma$. 于是我们得到

$$n = \dim \operatorname{im} \sigma + \dim \ker \sigma \geqslant 2 \dim \operatorname{im} \sigma$$

即 $\dim \operatorname{im} \sigma \leqslant \dfrac{n}{2}$.

(2) 由 (1) 可知，方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的基础解系含有 $n - r(A) = \dim \ker \sigma \geqslant \dfrac{n}{2}$ 个解向量，所以结论成立.

第 6 讲　对偶空间

第 7 讲　线性映射矩阵表示与矩阵运算基础

A 组

1. 由 $AB = BA$ 得 $A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = BCA = (BC)A$，由 $AC = CA$ 得 $A(B+C) = AB + AC = BA + CA = B + C$.

2. (1) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ 的充分条件是 $AB = BA$；

   (2) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 的充分条件是 $AB = BA$.

3. 由 $A^n = O$ 得 $A^n - E_n^n = -E_n$，即 $(A - E_n)(A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + E_n) = -E_n$，即 $(E_n - A)(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = E_n$.

4. 设 σ 的逆映射为 τ_1, τ_2，则 $\sigma\tau_1 = \sigma\tau_2 = E$，则 $\sigma(\tau_1 - \tau_2) = 0$.

   因为 σ 可逆，所以对于任意 $x \neq 0$，有 $\sigma(x) \neq 0$.

   而 $\forall x, \sigma((\tau_1 - \tau_2)(x)) = 0$，故 $\tau_1 - \tau_2 = 0, \tau_1 = \tau_2$.

5. 设 A 的第 i 行全为 0，则 A 的第 i 行与 A 的任意行线性相关，记 A 为 n 阶矩阵，则 $r(A) < n$.

   故对任意 n 阶矩阵 B，有 $r(AB) \leq r(A) < n = r(E_n)$，故 A 不可逆.

6. 记 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)$，则 $\alpha\beta^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$, 则有：$\mathrm{tr}(\alpha\beta^{\mathrm{T}}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \alpha^{\mathrm{T}}\beta$ ，因此 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta = -1 - 2 - 2 = -5$.

B 组

1. $T(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A$，其中

$$A = \begin{pmatrix} & & & & a_1 \\ 1 & & & & a_2 \\ & 1 & & & a_3 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

   是 T 关于基 B 的表示矩阵.

   T 是同构 $\iff$ T 是双射 $\iff$ $r(T) = n$，满秩. 所以当 $a_1 \neq 0$ 时，$r(T) = n$ 满秩，此时 T 是同构映射.

2. (1) 只需要证明 f_1, f_2, f_3 是线性无关的即可，事实上，这也十分显然 (考虑其在 $1, x, x^2$ 下的坐标表示线性无关)，想必读者可以自行证明

(2) 方法一：设 $(\sigma(f_1), \sigma(f_2), \sigma(f_3)) = (f_1, f_2, f_3)A$，则由

$$(\sigma(f_1), \sigma(f_2), \sigma(f_3)) = (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, x, x^2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} A$$

可得

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

方法二：通过待定系数法解方程组

$$\begin{cases} \sigma(f_1) = -f_1 + 3f_2 - f_3 \\ \sigma(f_2) = -2f_1 + 2f_2 - f_3 \\ \sigma(f_3) = -2f_1 + 3f_2 - f_3 \end{cases}$$

解得

$$(\sigma(f_1), \sigma(f_2), \sigma(f_3)) = (f_1, f_2, f_3)\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\sigma(f) = \sigma\left((1,x,x^2)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) &= \sigma\left((f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\\
&= (\sigma(f_1),\sigma(f_2),\sigma(f_3))\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
&= (1,x,x^2)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\
&= (1,x,x^2)\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\\
&= 2x^2+3x-4
\end{aligned}
$$

或也可采用待定系数法求出 $f=-2f_1+3f_2$，所以 $\sigma(f)=-2\sigma(f_1)+3\sigma(f_2)=2x^2+3x-4$.

3. (1) $\forall X,Y\in\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$，$k_1,k_2\in\mathbf{R}$，有

$$
\begin{aligned}
\varphi(k_1X+k_2Y) &= A(k_1X+k_2Y)B\\
&= k_1AXB+k_2AYB\\
&= k_1\varphi(X)+k_2\varphi(Y)
\end{aligned}
$$

所以 φ 是 $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 上的线性映射.

(2) 证明：易知 B 可逆. 当 $\lambda=-1$ 时，A 可逆. 故 φ 可逆，$\varphi^{-1}(X)=A^{-1}XB^{-1}$.

(3) $\lambda=-1$ 时，取 V 的一组基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$，有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{im}\sigma &= \operatorname{span}(\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\varphi(\alpha_3),\varphi(\alpha_4))\\
&= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\right)\\
\ker\sigma &= \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}2&-3\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

（步骤略，答案不唯一）

(4) 取 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_3, \alpha_4$ 即可. 此时矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. （答案不唯一）

4. 我们可以类比线性空间

$$W = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

W 的基只需求解线性方程组 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 即可，得到基础解系为 $(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, $(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

换回 V，即有基为 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 而

$$\begin{aligned} \sigma(A_1) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 + A_2 \\ \sigma(A_2) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 + A_2 \\ \sigma(A_3) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2A_3 \\ \Longrightarrow \sigma(A_1 + A_2) &= 2(A_1 + A_2),\ \ \sigma(A_1 - A_2) = 0,\ \ \sigma(A_3) = 2A_3 \end{aligned}$$

取基 $A_1 - A_2, A_1 + A_2, A_3$，有

$$(\sigma(A_1 - A_2), \sigma(A_1 + A_2), \sigma(A_3)) = (A_1 - A_2, A_1 + A_2, A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

为对角矩阵.

5. (1) 求核空间，即求使得 $T(f(x))$ 为零矩阵的 $f(x)$ 构成的空间. 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，则有

$$\begin{cases} f(0) = d = 0 \\ f(1) = a + b + c + d = 0 \\ f(-1) = -a + b - c + d = 0 \end{cases}$$

解方程，令 $a=t$ 有

$$\begin{cases} a=t \\ b=0 \\ c=-t \\ d=0 \end{cases} \implies f(x)=t(x^3-x)$$

故 $N(T)=\operatorname{span}(x^3-x)$.

求像空间，取 $\mathbf{R}[x]_4$ 的自然基 $1,x,x^2,x^3$.

$$T(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad T(x)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$T(x^2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad T(x^3)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

求它们的极大线性无关组. 我们发现 $T(x)=T(x^3)$，故先舍弃 $T(x^3)$，然后令

$$\begin{aligned} & k_1T(1)+k_2T(x)+k_3T(x^2)=0 \\ \implies & \begin{pmatrix} k_1 & k_1+k_2+k_3 \\ k_1-k_2+k_3 & k_1 \end{pmatrix}=0 \\ \implies & \begin{cases} k_1=0 \\ k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1-k_2+k_3=0 \end{cases} \\ \implies & k_1=k_2=k_3=0 \end{aligned}$$

故 $T(1),T(x),T(x^2)$ 线性无关. 故 $R(T)=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$.

(2) 我们只需要将 2×2 矩阵的第二列拼到第一列下方就可以变为我们熟悉的列向量形式，所以其矩阵表示也是简单的

$$T(1,x,x^2,x^3)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

其中 $e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$e_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,$e_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

6. (1) 对非齐次线性方程组 $AX=\xi_1$,

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}，\text{则}$$

$$\xi_2=C_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}C_1-1\\-C_1+1\\2C_1\end{pmatrix}\text{（其中 }C_1\text{ 为任意常数）.}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}，\text{对齐次线性方程组 }A^2X=\xi_1，$$

$$\bar{B}=\begin{pmatrix}A^2&\xi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $A^2X=\xi_1$ 的通解

$$\xi_3=C_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C_2-\frac{1}{2}\\C_2\\C_3\end{pmatrix}\text{（其中 }C_2,C_3\text{ 为任意常数）.}$$

(2) 因为 $|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}-1&C_1-1&-C_2-\frac{1}{2}\\1&-C_1+1&C_2\\-2&2C_1&C_3\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{2}\neq 0,$

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

7. 证明:

(1) 由于 $\ker\sigma=\operatorname{im}\sigma$，由 $\dim\operatorname{im}\sigma+\dim\ker\sigma=\dim V$ 可得.

(2) 设 $\beta_1,\dots,\beta_n$ 为 V 的一组基，则

$$\operatorname{im}\sigma=\operatorname{span}(\sigma(\beta_1),\dots,\sigma(\beta_n))=\ker\sigma$$

设 $\sigma(\beta_1),\dots,\sigma(\beta_{\frac{n}{2}})$ 为 $\operatorname{im}\sigma$ 的基，则可以证明

$$\sigma(\beta_1),\dots,\sigma(\beta_{\frac{n}{2}}),\beta_1,\dots,\beta_{\frac{n}{2}}$$

线性无关，且 σ 在此基下的矩阵即为所求的形式.

8. (1) 因为 $A^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&0\\0&\lambda_2^k\end{pmatrix}$，所以 $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E=$ $\begin{pmatrix}f(\lambda_1)&0\\0&f(\lambda_2)\end{pmatrix}$.

(2) $A=PBP^{-1}$，则 $A^2=(PBP^{-1})(PBP^{-1})=PB^2P^{-1}$. 由归纳法得 $A^k=PB^kP^{-1}$，于是

$$\begin{aligned}f(A)&=a_mPB^mP^{-1}+a_{m-1}PB^{m-1}P^{-1}+\cdots+a_0\\&=P\begin{pmatrix}f(\lambda_1)&0\\0&f(\lambda_2)\end{pmatrix}P^{-1}\\&=Pf(B)P^{-1}\end{aligned}$$

9. 为使得 “每行元素之和” 的条件有用，我们用 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 去乘以 A. 则 $A\alpha=\begin{pmatrix}k\\k\\\vdots\\k\end{pmatrix}=k\alpha$. 因为 A 可逆所以 $k\neq 0$, 同时由上面的式子有 $\alpha=kA^{-1}\alpha$, 得 $A^{-1}\alpha=\dfrac{1}{k}\alpha$ $(k\neq 0)$. 故 A^{-1} 每行和为 $\dfrac{1}{k}$ 成立.

10. (1) 由题意 $r(A)=r(B)$. A 可由初等变换为 $\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$B$ 可由初等变换为 $\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{pmatrix}$. 由于秩相同故 $2-a=0,a=2$.

(2) $(A,B)=\begin{pmatrix}1&2&a&1&a&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-a&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{pmatrix},Z=\begin{pmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&k_3-k_2\end{pmatrix}$

因为 P 可逆，所以 $k_2\neq k_3$，故 $P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},k_2\neq k_3$，$k_1,k_2,k_3\in\mathbf{R}$.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19. (1) 只需证明 V_1, V_2, V_3 的封闭性,以 V_3 为例,$\forall A, B \in V_3$, 有 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$，则 $\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \cdots & a\lambda a_{1n} + \mu b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda a_{nn} + \mu b_{nn} \end{pmatrix}$，$V_3$ 封闭得证. 其余 V_1, V_2 也同理可证.

(2) $\forall A \in \mathbf{F}^{n\times n}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，总可将 A 写成 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a0 & a_{12} - a_{21} & \cdots & a_{1n} - a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的形式. 又左边矩阵属于 V_1，右边矩阵属于 V_3，则 $\mathbf{F}^{n\times n} = V_1 + V_3$. 但对于 $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,$I \in V_1$ 且 $I \in V_3$，则 $V_1 \cap V_3 \neq \{0\}$，不是直和. 总可将 A 写成 $A_1 + A_2$ 的形式，其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & \cdots & -a_{n1} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} + a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$A_1 \in V_2, A_2 \in V_3, \mathbf{F}^{n\times n} = V_2 + V_3$. 又对于 $\forall B \in V_2 \cap V_3$, B 是反对称的. 并且 B 是上三角的. 综合可得 $B = 0$. 因此 $V_2 \cap V_3 = \{0\}$，$F_{n\times n} = V_2 \oplus V_3$ 得证.

20. (1) 只需证明 W_1 封闭即可. 对于 $A=\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}, A'=\begin{pmatrix} x' & -x' \\ y' & z' \end{pmatrix}$ 有 $\lambda A+\mu A'=\begin{pmatrix} \lambda x+\mu x' & -(\lambda x+\mu x') \\ \lambda y+\mu y & \lambda z+\mu z \end{pmatrix}$, 则 W_1 封闭, W_1 是 $\mathbf{M}_2(\mathbf{F})$ 的子空间. W_2 同理可证.

(2) W_1 的基：$B_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

W_2 的基：$B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

则 $\dim W_1=3, \dim W_2=3$. 要求 $\dim(W_1+W_2)$，只需求 $B_1,B_2,\ldots,B_6$ 的极大无关组即可. 可知 B_1,B_2,B_3,B_4 是极大线性无关组. $\dim(W_1+W_2)=4$. 根据维数公式 $\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=2$.

(3) $W_1\cap W_2=\left\{\begin{pmatrix} x & -x \\ -x & y \end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbf{F}\right\}$. 则一组基为 $E_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A 的坐标即为 $(3,1)$.

C 组

1. 注：tr 是矩阵的迹，定义为矩阵对角元素之和.

(1) 根据定义可知 tr 是线性的，有 $\operatorname{tr}(\lambda A+\mu B)=\lambda\operatorname{tr}(A)+\mu\operatorname{tr}(B)=0$，则 U 是封闭的，又 W 封闭是显然的，则 U,W 是 V 的子空间.

(2) 对于 W, 基为 $\{E\}$，$\dim W=1$. 对于 u, 设 E_{ij} 是 $a_{ij}=1$，其余元素为 0 的 n 阶方阵. 则由于 u 是对称矩阵，在非对角线元素上，u 的基包含 $E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31},\ldots,E_{(n-1)n}+E_{n(n-1)}$. 对于对角线元素 $a_{11}+\cdots+a_{nn}=0$. 方程解为

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

则还有 $n-1$ 个基 $E_{11}-E_{22}, E_{11}-E_{33},\ldots,E_{11}-E_{nn}$. 故 $\dim U=\dfrac{n^2-n}{2}+n-2=\dfrac{n^2+n-2}{2}$.

(3) 设 $V'=U+W$. 先证明直和，即 $U\cap W=\{0\}$. 这是显然的，因为 $\operatorname{tr}(\lambda E)=n\lambda$，仅当 $\lambda=0$ 时 $\lambda E\in U$ 即 $U\cap W=\{0\}$ 得证. 又 $\dim U+\dim W=\dim V'=n=\dim V$，则 $V=V'=U\oplus W$ 得证.

2. 首先设

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}.$$

由于 A,B,C 在 $\mathbf{M}_2(\mathbf{C})$ 中线性无关，所以将 A,B,C 的元素排为一列，可知矩阵

$$\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a_4 & b_4 & c_4\end{pmatrix}$$

的秩为 3，这里不妨设前三个行向量线性无关，即有

$$D=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$$

为可逆矩阵.

另外，注意到对任意的 x_1,x_2,x_3，有

$$x_1A+x_2B+x_3C=\begin{pmatrix}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3 & a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3\\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3 & a_4x_1+b_4x_2+c_4x_3\end{pmatrix}.$$

现在考虑方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3=0\\ a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3=1\\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3=1\end{cases}$$

其系数矩阵为 D,这是一个可逆矩阵,所以上述方程存在唯一解,不妨记为 (x_1',x_2',x_3'),此时就有 $|x_1'A+x_2'B+x_3'C|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & *\end{vmatrix}=-1.$

所以 $x_1'A+x_2'B+x_3'C$ 为可逆矩阵.

3.

第 8 讲　相抵标准形

A 组

4. 首先取 $\mathbf{R}^4$ 的自然基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$，那么

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)A,\ (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)B$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}$$

由此可知

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B$$

所以由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵为

$$A^{-1}B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}$$

另外，由于 ξ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 $X_0=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$，所以在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标为

$$A^{-1}X_0=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$

5. 证明：考虑矩阵 A 的行向量组的极大线性无关组，若添加的一行可由其极大线性无关组线性表示，则秩不变. 否则秩增加 1.

6. 证明:设 A 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,r(A)=r$; B 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,r(B)=k$. 不妨设：$B$ 的行向量组的极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{r-k}}$，其中 $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{r-k}}$（共 $r-k$ 个向量）是包含在 $\alpha_{m+1},\ldots,\alpha_s$（共 $s-m$ 个向量）之中的. 显然有 $r-k\leqslant s-m$，即

$$r(B)=k\geqslant r+m-s=r(A)+m-s.$$

B 组

1. V 的基 B_1 到 B_2 的过渡矩阵 P 具有下述形式:

$$P = \begin{pmatrix} \mathrm{im} & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

其中 B_1, B_2 分别是域 $\mathbf{F}$ 上 $m \times (n-m), (n-m) \times (n-m)$ 矩阵,

$$\beta_j = b_{j1}\delta_1 + \cdots + b_{jm}\delta_m + b_{j,m+1}\delta_{m+1} + \cdots + b_{jn}a_n$$

其中 $j = m+1, \ldots, n$. 于是

$$\beta_j + W = b_{j,m+1}(\alpha_{m+1} + W) + \cdots + b_{jn}(\alpha_n + W)$$

因此商空间 V/W 的基 $\alpha_{m+1} + W, \ldots, \alpha_n + W$ 到 $\beta_{m+1} + W, \ldots, \beta_n + W$ 的过渡矩阵是 B_2.

4. 证明: 我们设 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\ldots, \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} + \alpha_n$, $\beta_n = \alpha_n + \alpha_1$. 由于

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

满足 $|A| = 1 + (-1)^{n+1} = 2$, 所以 A 可逆. 根据教材命题 3.10.3 可得 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 等价. 当然, 这说明 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关的充要条件是 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 线性无关.

5. 记 $B_1 = \{\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \boldsymbol{e}_{21}, \boldsymbol{e}_{22}\}$, $B_2 = \{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4\}$.

(1) 设 $k_1\boldsymbol{g}_1 + k_2\boldsymbol{g}_2 + k_3\boldsymbol{g}_3 + k_4\boldsymbol{g}_4 = O$, 即

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 & k_2 + k_3 + k_4 \\ k_3 + k_4 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这个方程对应的四元齐次线性方程组的解为

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$$

所以 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4$ 线性无关, 从而是 $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 的一组基.

(2) $\mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^4$，所以 $\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \boldsymbol{e}_{21}, \boldsymbol{e}_{22}$ 可表示为 $\mathbf{R}^4$ 的自然基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$，而 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4$ 可表示为 $(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 于是由

$$(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4) = (\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \boldsymbol{e}_{21}, \boldsymbol{e}_{22})C$$

可得

$$(\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \boldsymbol{e}_{21}, \boldsymbol{e}_{22}) = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4)C^{-1}$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以基 B_2 变换为基 B_1 的变换矩阵为 C^{-1}.

(3) 在 $A^2 = A$ 中选取较为简单的. 例如，由

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $a = 1$，$b = 0$ 或 $b = 1$ 得

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cd & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

取 $d = 1$，$c = 0$ 或 $c = 1$ 得

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

上面的 A_1, A_2, A_3, A_4 均满足 $A_i^2 = A_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$，而且线性无关. 所以它们是 $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 的一组基 B_3.

(4) 先求基 B_2 变换为基 B_3 的变换矩阵 D，即

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4)D$$

由 (2) 所述，此时有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = CD$$

所以

$$D=C^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

由于矩阵 A 关于基 B_2 的坐标为 $X=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，所以 A 关于基 B_3 的坐标为

$$Y=D^{-1}X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}$$

6. (1) 初等变换即可.

(2) 同上.

(3) 矩阵 A 秩为 r 可写作 $A=P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q=P(E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr})Q$（$E_r$ 是 $r\times r$ 的单位矩阵，E_{ii} 是 $n\times n$ 的只有第 i 行 i 列的这个元素为 1，其他元素均为 0 的矩阵）. 每个 $PE_{ii}Q$ 都是秩为 1 的矩阵，故得证.

(4) 记 $r(A)=r$，把 A 写成 $P\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$ 的形式. 构造 $B=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ 可以发现其满足条件，故得证.

7. $r(A)=r$ 则 $AX=0$ 的解空间维数 $\dim N(A)=n-r$. 由 $r(A)+r(B)=k$ 得 $r(B)=k-r\leqslant n-r=\dim N(A)$. 要求 $AB=O$，说明 B 的列向量均为 $AX=0$ 的解，那么只需要选择合适的列向量组拼接成 B 即可（这一定能做到，因为 B 维数不会超过解空间维数）.

8. 由于 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=m$，可知对于矩阵 A 做初等列变换，可使其前 m 列变为单位矩阵，后 $n-m$ 列变为全 0 列. 因此，存在 n 阶可逆矩阵 P 使得

$$AP=\begin{pmatrix}E_m&O_{m\times(n-m)}\end{pmatrix}$$

于是

$$AP(AP)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}E&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\O\end{pmatrix}=E_m$$

所以存在 $B=(PP^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})$ 为 $n\times m$ 矩阵，使 $AB=E$.

9. 利用 A,B 的相抵标准形. 存在 n 阶可逆矩阵 P_1,Q_1,P_2,Q_2 使得

$$P_1AQ_1=\begin{pmatrix}E_{r_A}&O\\O&O\end{pmatrix},P_2BQ_2=\begin{pmatrix}O&O\\O&E_{r_B}\end{pmatrix}$$

于是

$$AQ_1 = P_1^{-1}\begin{pmatrix} E_{r_A} & O \\ O & O \end{pmatrix}, P_2B = \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_{r_B} \end{pmatrix} Q_2^{-1}$$

所以

$$AQ_1P_2B = P_1^{-1}\begin{pmatrix} E_{r_A} & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ O & E_{r_B} \end{pmatrix} Q_2^{-1} = O$$

取 $M = Q_1P_2$ 即可.

C 组

1. 本题直接求核空间困难，但由于我们只需求维数，所以我们转而求像空间维数并通过维数公式求核空间维数.

   取 $\mathbf{F}^{n\times p}$ 的自然基 $\boldsymbol{e}_{ij} = (e_{kl})_{n\times p}$，其中 $e_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$，即第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素为 0. 则 $\operatorname{im}\sigma = \operatorname{span}(\sigma(\boldsymbol{e}_{11}), \ldots, \sigma(\boldsymbol{e}_{np}))$.

   取 A 的列向量组 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，则可将 $\sigma(\boldsymbol{e}_{ij})$ 排列如下：

$$\begin{matrix} (a_1, 0, \ldots, 0) & (0, a_1, \ldots, 0) & \cdots & (0, 0, \ldots, a_1) \\ (a_2, 0, \ldots, 0) & (0, a_2, \ldots, 0) & \cdots & (0, 0, \ldots, a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, 0, \ldots, 0) & (0, a_n, \ldots, 0) & \cdots & (0, 0, \ldots, a_n) \end{matrix}$$

   记 $r(A) = r$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的极大线性无关组有 r 个向量，不妨设为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. 那么下列向量：

$$\begin{matrix} (a_{r+1}, 0, \ldots, 0) & (0, a_{r+1}, \ldots, 0) & \cdots & (0, 0, \ldots, a_{r+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, 0, \ldots, 0) & (0, a_n, \ldots, 0) & \cdots & (0, 0, \ldots, a_n) \end{matrix}$$

   均可以被其他向量线性表出. 观察除了上述向量的剩下的向量，可以发现这 rp 个向量线性无关，它们是 $\operatorname{im}\sigma$ 的一组基，因此 $\dim\operatorname{im}\sigma = rp$. 由维数公式，$\dim\ker\sigma = \dim\mathbf{F}^{n\times p} - \dim\operatorname{im}\sigma = (n-r)p$.

第 9 讲　矩阵运算进阶

A 组

1. (1) 若 $AB=kE\ (k\neq 0)$，则 $A^{-1}=\dfrac{1}{k}B$. 由

$$A^2-A-2E=A(A-E)-2E=O$$

可得

$$A(A-E)=2E \text{ 或 } A(E-A)=-2E.$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E),\ (E-A)^{-1}=-\frac{1}{2}A.$$

(2) 由

$$A^2-A-2E=(A-2E)(A+E)=O$$

可知，$A+E$ 和 $A-2E$ 不能同时可逆，否则 A^2-A-2E 为零矩阵可逆，矛盾.

2. (1)

$$\begin{aligned}(A-E)(B-E)&=AB-AE-EB+E^2\\&=AB-A-B+E\\&=AB-(A+B)+E\\&=AB-AB+E\\&=E.\end{aligned}$$

所以 $A-E$ 与 $B-E$ 互为逆矩阵.

(2) 由于 $A-E$ 与 $B-E$ 互为逆矩阵，所以

$$\begin{aligned}(B-E)(A-E)=E&\\&=BA-B-A+E\\&=BA-AB+E.\end{aligned}$$

所以 $BA-AB=O$，即 $AB=BA$.

(3) 由 $A=AB-B=B(A-E)$ 可得 $r(A)\leqslant r(B)$，同理可得 $r(B)\leqslant r(A)$，所以 $r(A)=r(B)$.

3. (1) 对于矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ O & D\end{pmatrix}$，

若 A 不可逆，则 $r\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix} = r(A) < m$，故 $r\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} < m+n$，原矩阵不可逆.

若 D 不可逆，则 $r\begin{pmatrix} O & D \end{pmatrix} = r(D) < n$，故 $r\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} < m+n$，原矩阵不可逆.

若 A 与 D 均可逆，利用分块矩阵初等变换，我们有

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = E_{m+n},$$

故有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -BD^{-1} \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

(2) 对于矩阵 $\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}$，

由于

$$\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ O & B \end{pmatrix},$$

而 $\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，故

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{可逆} \iff \begin{pmatrix} C & D \\ O & B \end{pmatrix} \text{可逆} \iff B, C \text{可逆}.$$

若 B 与 C 均可逆，由第一问的结论，有

$$\left(\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} C^{-1} & -C^{-1}DB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}.$$

B 组

1.

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= (E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})(E - A) \\ &= E - A^m = \begin{pmatrix} 1-a^m & -mba^{m-1} \\ 0 & 1-a^m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. 求与 A 可交换的矩阵等价于求与 $A-E$ 可交换的矩阵 X. 可解得

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_{11} & -2x_{11}-2x_{32}+2x_{33} & 4x_{32} \\ 0 & -x_{32}+x_{33} & 2x_{32} \\ 0 & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \\ &= x_{11}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{32}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{33}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 x_{11}, x_{32}, x_{33} 为任意实数. 由此我们也得到了 A 可交换的矩阵构成的子空间的一组基.

3. (1) 不妨设 $B=(b_{ij})_{3\times3}$ 与 A 可交换, 即 $AB=BA$, 这等价于 $(A-E)B=B(A-E)$, 即

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

对应元素相等，可得 $b_{31}=b_{13}, b_{32}=b_{12}, b_{33}=b_{11}, b_{21}=b_{23}$，即所有与 A 可交换的矩阵为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \\ b_{13} & b_{12} & b_{11} \end{pmatrix},$$

其中 $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}$ 为任意实数.

(2) 由于 $AB+E=A^2+B$，所以

$$(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E).$$

又由于 $|A-E|=-1\neq 0$，所以 $A-E$ 可逆，进而

$$B=A+E=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. (1) 首先有 $E\in C(A)$，所以 $C(A)$ 非空. $\forall B_1, B_2\in C(A), \lambda\in\mathbf{F}$，有

$$A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$$
$$A(\lambda B_1)=\lambda AB_1=\lambda B_1A=(\lambda B_1)A.$$

所以 $C(A)$ 是 $\mathbf{F}^{n\times n}$ 的子空间.

(2) $C(E)=\mathbf{F}^{n\times n}$.

(3) 我们有结论：$C(A)$ 为全体对角矩阵构成的集合. 故 $\dim C(A)=n$. 基矩阵 $B_k=(b_{ij})_{n\times n}$，其中 $b_{ij}=\delta_{ij}\delta_{jk}$. $B_1,B_2,\ldots,B_n$ 为一组基.

5. (1) 由 $A^k=O$ 有

$$E=E-A^k=(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1}).$$

故 $E-A$ 可逆，且

$$(E-A)^{-1}=E+A+\cdots+A^{k-1}.$$

(2) 若 k 为偶数，设 $k=2m$，由 $A^k=O$ 有

$$E=E-A^{2m}=(E+A)(E-A)(E+A^2+A^4+\cdots+A^{2m-2}).$$

故 $E+A$ 可逆，且

$$(E+A)^{-1}=(E-A)(E+A^2+A^4+\cdots+A^{2m-2}).$$

若 k 为奇数，设 $k=2m+1$，由 $A^k=O$ 有

$$E=E-A^{2m+1}=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{2m-1}+A^{2m})$$

故 $E-A$ 可逆，且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{2m-1}+A^{2m}$$

(3) 由于 $A^k=O$，于是

$$e^A=E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}.$$

由 $e^Ae^{-A}=E$ 知 $E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}$ 可逆，且

$$(E+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1})^{-1}=e^{-A}.$$

6. (1) $A^2=\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$，故 $A^2-nA=O$，令 $a=1,b=-n$ 即可.

(2) 利用 $A^2=nA$，有

$$A^{100}=nA^{99}=n^2A^{98}=\cdots=n^{99}A=\begin{pmatrix} n^{99} & \cdots & n^{99} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n^{99} & \cdots & n^{99} \end{pmatrix}.$$

(3) 利用 $A^2=nA$，有

$$\begin{aligned}(A+E)^3&=A^3+3A^2+3A+E\\&=(n^2+3n+3)A+E\\&=\begin{pmatrix} n^2+3n+4 & n^2+3n+3 & \cdots & n^2+3n+3 \\ n^2+3n+3 & n^2+3n+4 & \cdots & n^2+3n+3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n^2+3n+3 & n^2+3n+3 & \cdots & n^2+3n+4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(4) 为得到 $(A+E)^{-1}$，我们需要构造另一个含 A 的一次多项式，该式乘以 $A+E$ 后出现 A^2-nA，以利用条件 $A^2=nA$. 观察发现所需的多项式为 $A-(n+1)E$:

$$(A+E)(A-(n+1)E)=A^2-nA-(n+1)E=-(n+1)E,$$

于是

$$(A+E)^{-1}=-\frac{1}{n+1}A+E=\begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & \cdots & -\frac{1}{n+1} \\ -\frac{1}{n+1} & \frac{n}{n+1} & \cdots & -\frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{n}{n+1} \end{pmatrix}.$$

7. 见本章 A 组第 3 题的答案，此处不再赘述.

8. 我们先证明 $r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$:

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$，并设 $r(A)=r,r(B)=s$. 不妨设 A 的列向量组的一个极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$，$B$ 的列向量组的一个极大线性无关组为 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$.

取 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ 的一个极大线性无关组 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p$，则 $p\leqslant r+s$. 该极大线性无关组可以线性表示 A 与 B 的列向量组，因此可以线性表示 $\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm$

$\beta_2, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n$，即 $A \pm B$ 的列向量组，故

$$r(A \pm B) \leqslant p \leqslant r + s = r(A) + r(B).$$

再证明 $|r(A) - r(B)| \leqslant r(A \pm B)$：

不妨设 $r(A) \geqslant r(B)$，即证 $r(A) - r(B) \leqslant r(A \pm B)$. 由于

$$\begin{aligned} r(A) &\leqslant r(A+B) + r(-B) = r(A+B) + r(B), \\ r(A) &\leqslant r(A-B) + r(B), \end{aligned}$$

即有

$$r(A) - r(B) \leqslant r(A \pm B).$$

同理可得若 $r(A) \leqslant r(B)$，则 $r(B) - r(A) \leqslant r(A \pm B)$. 综上，结论成立.

9. 若 B 是 3×1 矩阵，C 是 1×3 矩阵，利用秩不等式 $r(BC) \leqslant \min\{r(B), r(C)\}$，以及 $r(B) \leqslant 1, r(C) \leqslant 1$，有

$$r(BC) \leqslant 1.$$

反之，若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，则 A 任意两个列向量线性相关. 任取其中的一个非零列向量 β（$r(A) = 1$ 保证其存在），则 A 可表示为

$$A = (a_1\beta, a_2\beta, a_3\beta) = \beta(a_1, a_2, a_3).$$

令 $B = \beta, C = (a_1, a_2, a_3)$，即有 $A = BC$.

10. (1) 设 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$，$\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^{\mathrm{T}} &= (a_1\alpha, a_2\alpha, \ldots, a_n\alpha), \\ \beta\beta^{\mathrm{T}} &= (b_1\beta, b_2\beta, \ldots, b_n\beta). \end{aligned}$$

故 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta\beta^{\mathrm{T}}$ 的任意两个列向量线性相关，$r\left(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right) \leqslant 1$，$r\left(\beta\beta^{\mathrm{T}}\right) \leqslant 1$，故

$$r\left(\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \beta\beta^{\mathrm{T}}\right) \leqslant r\left(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right) + r\left(\beta\beta^{\mathrm{T}}\right) \leqslant 2.$$

(2) 若 $\alpha = 0$，则 $A = \beta\beta^{\mathrm{T}}$，故 $r(A) \leqslant 1$.

若 $\alpha \neq 0$，由于 α, β 线性相关，存在常数 k，使得 $\beta = k\alpha$，则

$$A = \alpha\alpha^{\mathrm{T}} + (k\alpha)(k\alpha)^{\mathrm{T}} = (k^2 + 1)\alpha\alpha^{\mathrm{T}},$$

故 $r(A) \leqslant 1$.

11. (1) 存在 n 阶实方阵 C 使得 $A = ABC \implies r(A) = r(AB)$：由秩不等式 $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$，我们有

$$r(ABC) \leqslant r(AB) \leqslant r(A).$$

而由 $A = ABC$ 可知 $r(A) = r(ABC)$，故 $r(A) = r(AB)$.

(2) $r(A) = r(AB) \implies$ 存在 n 阶实方阵 C 使得 $A = ABC$：设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n b_{i1}\alpha_i, \sum_{i=1}^n b_{i2}\alpha_i, \ldots, \sum_{i=1}^n b_{in}\alpha_i\right). \end{aligned}$$

设 $\gamma_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}\alpha_i$. 由于 $r(A) = r(AB)$，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ 等价，故存在 $C = (k_{ij})_{n\times n}$，使得

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \\ &= (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)C, \end{aligned}$$

即 $A = ABC$.

12. (1) 该问题可以转换为线性映射的像空间停止收缩的问题：设 $A_{n\times n} = M(\sigma)$，则 $r(A^m) = r(A^{m+1})$ 等价于 $\dim \operatorname{im} \sigma^m = \dim \operatorname{im} \sigma^{m+1}$.

任取 $k \geqslant 2$，由于 $\forall \beta \in \operatorname{im} \sigma^{k-1}$，存在 $\alpha \in \mathbf{F}^n$，使得 $\beta = \sigma^k(\alpha) = \sigma^{k-1}(\sigma(\alpha)) \in \operatorname{im} \sigma^{k-1}$，我们有 $\operatorname{im} \sigma^k \subseteq \operatorname{im} \sigma^{k-1}$，即

$$\mathbf{F}^n \supseteq \operatorname{im} \sigma \supseteq \operatorname{im} \sigma^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{im} \sigma^m \supseteq \operatorname{im} \sigma^{m+1} \supseteq \cdots,$$

又 $\dim \operatorname{im} \sigma^m = \dim \operatorname{im} \sigma^{m+1}$，故

$$\operatorname{im} \sigma^{m+1} = \operatorname{im} \sigma^m.$$

假设 $n = k - 1$ $(k > m)$ 时，有 $\operatorname{im} \sigma^n = \operatorname{im} \sigma^{n+1}$ 成立，下证 $n = k$ 时该结论也成立：

$\forall \gamma \in \operatorname{im}\sigma^k$，存在 $\alpha \in \mathbf{F}^n$，使得 $\gamma = \sigma^k(\alpha) = \sigma(\sigma^{k-1}(\alpha))$. 设 $\beta = \sigma^{k-1}(\alpha) \in \operatorname{im}\sigma^{k-1} = \operatorname{im}\sigma^k$，则 $\gamma = \sigma(\beta) \in \operatorname{im}\sigma^{k+1}$，故 $\operatorname{im}\sigma^k \subseteq \operatorname{im}\sigma^{k+1}$，而另一个方向的包含关系已经证明，所以有

$$\operatorname{im}\sigma^{k+1} = \operatorname{im}\sigma^k.$$

因此，

$$\operatorname{im}\sigma^m = \operatorname{im}\sigma^{m+1} = \operatorname{im}\sigma^{m+2} = \cdots.$$

显然有

$$r(A^m) = r(A^{m+1}) = r(A^{m+2}) = \cdots.$$

(2) 反证法. 假设 $r(A^n) \neq r(A^{n+1})$, 则由 $\operatorname{im}\sigma^{n+1} \subseteq \operatorname{im}\sigma^n$, 有 $r(A^n) > r(A^{n+1}) \geqslant 0$. 若存在 $k < n$ 使得 $r(A^k) = r(A^{k+1})$，则由第一问可知 $r(A^n) = r(A^{n+1})$，矛盾，故不存在这样的 k，即

$$n > r(A) > r(A^2) > \cdots > r(A^{n-1}) > r(A^n) > r(A^{n+1}) \geqslant 0,$$

由于秩只能是非负整数，上式不可能成立. 故有 $r(A^n) = r(A^{n+1})$. 再由第一问可得

$$r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \cdots.$$

C 组

1. 设 $v_n = (a_n, b_n, 2^n)^{\mathrm{T}}$，则递推式可化为

$$v_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} v_{n-1},$$

其中 $v_0 = (-1, 3, 1)^{\mathrm{T}}$.

设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则

$$v_n = A^n v_0.$$

下面我们求 A^n. 注意到

$$A = 2E + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

令 $\alpha=(1,2,0)^{\mathrm{T}},\beta^{\mathrm{T}}=(1,0,2),B=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，则

$$B^n=\left(\alpha\beta^{\mathrm{T}}\right)^n=\alpha\left(\beta^{\mathrm{T}}\alpha\right)^{n-1}\beta^{\mathrm{T}}=\mathrm{tr}(B)^{n-1}B=3^{n-1}B.$$

此时我们有

$$\begin{aligned}
A^n&=(2E+B)^n\\
&=\tbinom{n}{0}2^nE+\tbinom{n}{1}2^{n-1}B+\tbinom{n}{2}2^{n-2}B^2+\cdots+\tbinom{n}{n}B^n\\
&=2^nE+\left(\tbinom{n}{1}2^{n-1}3^0+\tbinom{n}{2}2^{n-2}3^1+\cdots+\tbinom{n}{n}2^03^{n-1}\right)B\\
&=2^nE-\frac{2^n}{3}B+\frac{1}{3}\left(\tbinom{n}{0}2^n3^0+\tbinom{n}{1}2^{n-1}3^1+\cdots+\tbinom{n}{n}2^03^{n-1}\right)B\\
&=2^nE+\frac{5^n-2^n}{3}B\\
&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^n+2\cdot2^n&5^n-2^n&5^n-2^n\\2(5^n-2^n)&2\cdot5^n+2^n&2(5^n-2^n)\\0&0&3\cdot2^n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

代入 $v_n=A^nv_0$，有

$$v_n=\begin{pmatrix}5^n-2\cdot2^n\\2\cdot5^n+2^n\\2^n\end{pmatrix}.$$

所以 $a_n=5^n-2\cdot2^n,b_n=2\cdot5^n+2^n$.

2. (1) 可以将 A 拆成一个 $n\times2$ 矩阵与一个 $2\times n$ 矩阵的乘积:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1&\sin\alpha_1\\\cos\alpha_2&\sin\alpha_2\\\vdots&\vdots\\\cos\alpha_n&\sin\alpha_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta_1&\cos\beta_2&\cdots&\cos\beta_n\\\sin\beta_1&\sin\beta_2&\cdots&\sin\beta_n\end{pmatrix}.$$

故由秩不等式 $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$，有 $r(A)\leqslant2<n$，故 A 不可逆.

(2) 可以将 A 拆成两个秩为 1 的矩阵的和:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1y_1&x_1y_2&\cdots&x_1y_n\\x_2y_1&x_2y_2&\cdots&x_2y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_ny_1&x_ny_2&\cdots&x_ny_n\end{pmatrix},$$

故由秩不等式 $r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$，有 $r(A)\leqslant1+1=2<n$，故 A 不可逆.

3. (1) 设 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ 与 I 可交换，即 $BI=IB$，则

$$\begin{pmatrix} b_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} \\ b_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} \\ b_{3n} & b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,n} & b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n-1} \\ b_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n,n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & \cdots & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \end{pmatrix},$$

逐一对照两矩阵中的对应元素，可得

$$\begin{aligned} b_{1n} = b_{21} = b_{32} = \cdots = b_{n,n-1}, \\ b_{1,n-1} = b_{2n} = b_{31} = \cdots = b_{n,n-2}, \\ \vdots \\ b_{11} = b_{22} = b_{33} = \cdots = b_{nn}. \end{aligned}$$

第 k 行等式对应了 I^{n-k}，故与 I 可交换的矩阵都可以写成

$$a_{11}E + a_{12}I + a_{13}I^2 + \cdots + a_{1n}I^{n-1}.$$

(2) 按照与第一问相同的方法进行操作，即可得到结果.

4. 下使用数学归纳法证明该命题. 对于 $n=1$ 的情况，取 $B=E_1$ 即可保证 BA 为上三角矩阵. 现在假设命题对 $n-1$ 阶满足条件的矩阵均成立，下证命题对 n 阶满足条件的矩阵也成立：

设 $A_n=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix}$，其中 A_{n-1} 是 $n-1$ 阶方阵，满足各阶左上角子块矩阵都可逆. 由归纳假设可知存在 $n-1$ 阶下三角矩阵 B_{n-1}，使得 $C_{n-1}=B_{n-1}A_{n-1}$ 为上三角矩阵. 下面我们构造 n 阶下三角矩阵 B_n：令

$$B_n = \begin{pmatrix} B_{n-1} & \mathbf{0} \\ \gamma & 1 \end{pmatrix},$$

我们要使

$$C_n = B_nA_n = \begin{pmatrix} B_{n-1} & \mathbf{0} \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{n-1} & B_{n-1}\beta \\ \gamma A_{n-1}+\alpha & \gamma\beta + a_{nn} \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵，只需令 $\gamma A_{n-1}+\alpha=0$ 即可. 由于 A_{n-1} 可逆，故对任意 α 都有对应的 γ 存在，于是 B_n 存在. 因此，命题对 n 阶矩阵也成立.

5. 证明：$\forall \alpha \in W$，$A_{12}\alpha = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} O_{k\times 1} \\ \alpha \end{pmatrix} &= A^{-1}A\begin{pmatrix} O_{k\times 1} \\ \alpha \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_{k\times 1} \\ \alpha \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} O_{l\times 1} \\ A_{22}\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_{l\times 1} \\ A_{22}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{12}A_{22}\alpha \\ B_{22}A_{22}\alpha \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故 $B_{12}A_{22}\alpha = \mathbf{0}$，故我们可以推测如下定义：$\sigma \in \mathcal{L}(W,U)$，$\sigma(\alpha) = A_{22}\alpha$. 只需证明 σ 是单射且满射即可.

单射：$\sigma(\alpha) = \sigma(\beta) \implies A_{22}(\alpha-\beta) = \mathbf{0}$. 又有 $A_{12}\alpha = A_{12}\beta = \mathbf{0} \implies A_{12}(\alpha-\beta) = \mathbf{0}$. 故 $\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}(\alpha-\beta) = \mathbf{0}$. 由于 $\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$ 列满秩（A 可逆），故 $\alpha = \beta$.

满射：$\forall \gamma \in U$，$B_{12}\gamma = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} O_{l\times 1} \\ \gamma \end{pmatrix} &= AA^{-1}\begin{pmatrix} O_{l\times 1} \\ \gamma \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_{l\times 1} \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= A\begin{pmatrix} O_{k\times 1} \\ B_{22}\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_{k\times 1} \\ B_{22}\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{12}B_{22}\gamma \\ A_{22}B_{22}\gamma \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

故 $\exists B_{22}\gamma \in W$，$A_{22}B_{22}\gamma = \gamma \in U$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，$C = A_{11}$，则根据 Schur 补的定义，有

$$\begin{aligned}A/C &= \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} A_{11}^{-1}\begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{23} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{13} \\ A_{32} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{12} & A_{33} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{13} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$A/B = A_{33} - \begin{pmatrix} A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix},\quad B/C = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

设 $P_{ij} = A_{ij} - A_{i1}A_{11}^{-1}A_{1j}$ $(i = 2,3; j = 2,3)$，则

$$A/C = \begin{pmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{pmatrix},\quad B/C = P_{22}.$$

故

$$(A/C)/(B/C) = P_{33} - P_{32}P_{22}^{-1}P_{23}.$$

由分块矩阵初等变换可以求得

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}P_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & P_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

由此可得

$$\begin{aligned} A/B &= A_{33} - \begin{pmatrix} A_{31} & A_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}P_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}P_{22}^{-1} \\ -P_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & P_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix} \\ &= A_{33} - A_{31}\left(A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}P_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\right) - A_{31}\left(-A_{11}^{-1}A_{12}P_{22}^{-1}\right) - \\ &\quad A_{32}\left(-P_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\right) - A_{32}P_{22}^{-1}A_{23} \\ &= \left(A_{33} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{13}\right) - \left(A_{32} - A_{31}A_{11}^{-1}A_{12}\right)P_{22}^{-1}\left(A_{23} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{13}\right) \\ &= P_{33} - P_{32}P_{22}^{-1}P_{23} \\ &= (A/C)/(B/C). \end{aligned}$$

7. 令

$$B = \begin{pmatrix} E_n & A^{\mathrm{T}} \\ A & E_s \end{pmatrix},$$

对 B 做分块倍加变化，有

$$\begin{pmatrix} E_n & A^{\mathrm{T}} \\ A & E_s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n - A^{\mathrm{T}}A & A^{\mathrm{T}} \\ O & E_s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n - A^{\mathrm{T}}A & O \\ O & E_s \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} E_n & A^{\mathrm{T}} \\ A & E_s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & A^{\mathrm{T}} \\ O & E_s - AA^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s - AA^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

分块倍加变换不改变矩阵的秩，故有

$$r(B) = r\begin{pmatrix} E_n - A^{\mathrm{T}}A & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = r(E_n - A^{\mathrm{T}}A) + s,$$
$$r(B) = r\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s - AA^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = r(E_s - AA^{\mathrm{T}}) + n.$$

于是有 $r(E_n - A^{\mathrm{T}}A) - r(E_s - AA^{\mathrm{T}}) = n - s$.

8. (1) 由

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & AC \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & AC + BD \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & E \\ -AB & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & E \\ AB & 0 \end{pmatrix}$$

可得.

(2) 用分块矩阵的方法，我们知道

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & O \\ A & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}$$

结合 $AB = BA$，我们知道

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & O \\ -A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & A+B \end{pmatrix}$$

于是

$$r(A)+r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} AB & A \\ O & A+B \end{pmatrix} \geqslant r(AB)+r(A+B)$$

9. 略有超纲，使用贝祖定理. $\exists u(x), v(x), u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=1$，于是

$$r\begin{pmatrix} f_1(A) & O \\ O & f_2(A) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} f_1(A) & f_1(A)u(A)+f_2(A)v(A) \\ O & f_2(A) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} f_1(A) & E_n \\ O & f_2(A) \end{pmatrix}$$
$$= r\begin{pmatrix} f_1(A) & E_n \\ -f_2(A)f_1(A) & O \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & E_n \\ f(A) & O \end{pmatrix}.$$

因此

$$f(A)=O \iff r\begin{pmatrix} f_1(A) & O \\ O & f_2(A) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} O & E_n \\ f(A) & O \end{pmatrix} = n \iff r(f_1(A))+r(f_2(A)) = n.$$

10. 由于 A 是列满秩矩阵，B 是行满秩矩阵，知存在可逆矩阵 $P_{3\times 3}, Q_{2\times 2}$ 使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_2 \\ O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} E_2 & O \end{pmatrix} Q,$$

于是

$$BA = \begin{pmatrix} E_2 & O \end{pmatrix} QP \begin{pmatrix} E_2 \\ O \end{pmatrix}.$$

由 $(AB)^2 = 9AB$ 有

$$P\begin{pmatrix} E_2 \\ O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & O \end{pmatrix} QP \begin{pmatrix} E_2 \\ O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & O \end{pmatrix} Q = 9P\begin{pmatrix} E_2 \\ O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 & O \end{pmatrix} Q,$$

即

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ O \end{pmatrix} BA \begin{pmatrix} E_2 & O \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} E_2 \\ O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & O \end{pmatrix},$$

也就是

$$\begin{pmatrix} BA & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9E_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 $BA = 9E_2$.

第 10 讲　行列式

A 组

1. (1) 公理化定义 $\Longrightarrow$ 递归式定义:

先证明一个引理：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中 $a_{in}=0$，$i=1,2,\ldots,n-1$，则 $|A|=a_{nn}M_{nn}=a_{nn}A_{nn}$.

将 A 分块表示为

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \alpha & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $|A_1|=M_{nn}=A_{nn}$. 若 $a_{nn}=0$，则 A 不可逆，$|A|=0$，引理成立；若 A_1 不可逆，则 $r(A)\leqslant r(A_1)+1<n$，故 A 不可逆，$|A|=0$，引理亦成立；若 $a_{nn}\neq 0$ 且 A_1 可逆，则对 A 作倍加列变换，有

$$|A|=\begin{vmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

再对 A 作倍加行变换，将 A_1 化为上三角矩阵 B_1，且有 $|B_1|=|A_1|=M_{nn}$，此时有

$$|A|=\begin{vmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{nn}B_1=a_{nn}M_{nn}.$$

上式成立是因为上三角矩阵的行列式等于其对角线元素之积.

下面我们来通过公理化定义推出递归式定义. 我们先推导行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$ 对第 j 列元素的展开式:

令 α_j 为 A 中第 j 列的元素，则由公理化定义可得

$$\begin{aligned} D&=D(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n)\\ &=D(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i,\ldots,\alpha_n)\\ &=\sum_{i=1}^{n}D(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,a_{ij}e_i,\ldots,\alpha_n). \end{aligned}$$

对于上式中的第 i 项 D_i，我们将第 j 列依次与第 $j+1,j+2,\ldots,n$ 列对换，再

将第 i 行依次与第 $i+1, i+2, \ldots, n$ 行对换，于是有

$$D_i = (-1)^{2n-i-j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} & a_{ij} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ \alpha_{ij} & a_{ij} \end{vmatrix}.$$

根据引理，我们有

$$D_i = (-1)^{2n-i-j} a_{ij}|A_1| = (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

由此可得行列式的递推式定义：

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

(2) 递归式定义 $\Longrightarrow$ 公理化定义：

i.（线性性）直接将公理化定义用递归式对第 i 列展开：

$$\begin{aligned} & D(\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_i + \mu\beta_i, \ldots, \alpha_n) \\ = & \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{ki} + \mu b_{ki}) A_{ki} \\ = & \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki} + \mu \cdot \sum_{k=1}^{n} b_{ki} A_{ki} \\ = & \lambda D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + \mu D(\alpha_1, \ldots, \beta_i, \ldots, \alpha_n), \end{aligned}$$

则线性性得证.

ii.（反对称性）使用数学归纳法证明. 显然，$D(\alpha_1, \alpha_2) = -D(\alpha_2, \alpha_1)$，然后做出归纳假设：对于任意正整数 i, j，$1 \leqslant i, j \leqslant n-1$ 且 $i \neq j$，有：

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_{n-1}) = -D(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

由此做出递推，对交换前后的行列式的首行做展开：

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k},$$

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} a'_{1k} A'_{1k}.$$

其中,除第 i,j 项外,由归纳假设,其余项都满足 $a_{1k}=a'_{1k},A_{1k}=-A'_{1k}$,则有 $a_{1k}A_{1k}=-a'_{1k}A'_{1k},k\neq i,j$. 因此主要考察 $a_{1i}A_{1i}+a_{1j}A_{1j}$ 与 $a'_{1i}A'_{1i}+a'_{1j}A'_{1j}$ 这两项. 首先有 $a'_{1i}=a_{1j},a'_{1j}=a_{1i}$. 然后将 A_{1i} 与 A'_{1j} 两项展开对比:

$$\begin{aligned}A_{1i}&=(-1)^{1+i}D(\beta_1,\dots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\dots,\beta_j,\dots,\beta_n),\\A'_{1j}&=(-1)^{1+j}D(\beta_1,\dots,\beta_{i-1},\beta_j,\beta_{i+1},\dots,\beta_{j-1},\beta_{j+1},\dots,\beta_n).\end{aligned}$$

式中的 β_k 表示原列向量 α_k 去掉首行元素后剩余 $n-1$ 个元素组成的新列向量. 可以发现, A'_{1j} 向左交换 $j-(i+1)$ 次后与 A_{1i} 是绝对值一致的. 则根据归纳假设,有 $(-1)^{j-(i+1)}A'_{1j}=(-1)^{1+j-(1+i)}A_{1i}$,即有 $A'_{1j}=-A_{1i}$,所以 $a_{1i}A_{1i}+a_{1j}A_{1j}=-(a'_{1j}A'_{1j}+a'_{1i}A'_{1i})$. 综上可证:

$$D(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)=D(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n).$$

iii.(规范性)

$$|E_n|=\begin{vmatrix}E_{n-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&1\end{vmatrix}=|E_{n-1}|=\cdots=|E_1|=1.$$

(3) 公理化定义 $\Longrightarrow$ 逆序数定义:见本章"逆序数定义"部分的推导.

(4) 逆序数定义 $\Longrightarrow$ 公理化定义:

i.(线性性)使用逆序数定义对行列式进行展开:

$$\begin{aligned}&D(\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_i+\mu\beta_i,\dots,\alpha_n)\\=&\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{\varepsilon}a_{k_11}\cdots a_{k_{i-1},i-1}(\lambda a_{k_ii}+\mu b_{k_ii})a_{k_{i+1},i+1}\cdots a_{k_nn}\\=&\lambda\left(\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{\varepsilon}a_{k_11}\cdots a_{k_{i-1},i-1}a_{k_ii}a_{k_{i+1},i+1}\cdots a_{k_nn}\right)+\\&\mu\left(\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{\varepsilon}a_{k_11}\cdots a_{k_{i-1},i-1}b_{k_ii}\cdots a_{k_nn}\right)\\=&\lambda D(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)+\mu D(\alpha_1,\dots,\beta_i,\dots,\alpha_n),\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=\tau(k_1,k_2,\dots,k_n)$ 表示排列 $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ 的逆序数.

ii.(反对称性)对于 $D(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)$ 逆序数定义展开式中的任意一项

$$(-1)^{\tau(k_1,\dots,k_i,\dots,k_j,\dots,k_n)}a_{k_11}\cdots a_{k_ii}\cdots a_{k_jj}\cdots a_{k_nn},$$

其可以对应 $D(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$ 逆序数定义展开式中的一项

$$(-1)^{\tau(k_1,\dots,k_j,\dots,k_i,\dots,k_n)}a_{k_11}\cdots a_{k_jj}\cdots a_{k_ii}\cdots a_{k_nn}.$$

而排列 $(k_1,\dots,k_i,\dots,k_j,\dots,k_n)$ 与 $(k_1,\dots,k_j,\dots,k_i,\dots,k_n)$ 的奇偶性必定相反，故以上两个对应项为相反数，因此有

$$D(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)=-D(\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n).$$

iii.（规范性）E_n 的逆序数定义展开式中只有一项

$$(-1)^{\tau(1,2,\dots,n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

不为零，故 $|E_n|=1$.

2. 使用倍加列变换的性质，可得 $|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3,\alpha_1+4\alpha_2+16\alpha_3|=6|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=12$.

3. (1) 首先由反对称矩阵的性质，有 $A^T=-A$，其次由矩阵与行列式的性质，可得 $|A^T|=|A|$，则可推出 $|A|=|-A|=(-1)^n|A|$，又 n 为奇数，故 $|A|=0$，矩阵 A 不可逆.

   (2) 只需证明 AB 的秩小于 n，即 $|AB|=0$ 即可. B 是奇数阶反对称矩阵，$|B|=0$，则 $|AB|=|A||B|=0$ 得证.

4. 根据伴随矩阵的性质，$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}$. 其中，对 $\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}$ 做递归式展开，有 $\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{1+k}a_{1k}\begin{vmatrix}M_{1k}&O\\O&B\end{vmatrix}$，依此逐次展开可得 $\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=|A||B|=ab$. 又 $ab\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=ab\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\cdot aA^{-1}&O\\O&a\cdot bB^{-1}\end{pmatrix}$，最终可得 $\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}bA^*&O\\O&aB^*\end{pmatrix}$.

   与前一个式子的展开类似，$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}$，其中对前一步推导做少量修正后可得 $\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|=(-1)^{mn}ab$, 则 $(-1)^{mn}ab\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=(-1)^{mn}\begin{pmatrix}O&a\cdot bB^{-1}\\b\cdot aA^{-1}&O\end{pmatrix}$，最终可得 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^*=(-1)^{mn}\begin{pmatrix}O&aB^*\\bA^*&O\end{pmatrix}$.

5. 证明；

   (1) 对正整数 k，有 $(A^k)^*=(A^*)^k$. 从而若 $A^m=A$，则 $(A^*)^m=(A^m)^*=A^*$. 即 A 是幂等矩阵，则 A^* 也是幂等矩阵. 同样，若 $A^m=0$，则 $(A^*)^m=(A^m)^*=0$. 即 A 是幂零矩阵，则 A^* 也是幂零矩阵.

(2) $(A^*)^T = (A^T)^* = A^*$. 从而若 A 是对称矩阵，则 A^* 也是对称矩阵 .$(A^*)^T = (A^T)^* = (-A)^* = (-1)^{n-1}A^*$. 从而若 A^* 为偶数阶时也为反对称矩阵，奇数阶时为对称矩阵.

6. 对于上三角矩阵，只需看其伴随矩阵的下半部分元素，即 $A_{ij}, j > i$. 对这些代数余子式，要么有一整行或整列为零，要么对角线存在零元素，则这些余子式均为零，伴随矩阵是上三角矩阵.

   或者使用另法，当 A 是可逆矩阵，即 A 对角线元素不为零，则 $A^* = |A| \cdot A^{-1}$，其中 A^{-1} 也是上三角矩阵，因此伴随矩阵 A^* 是上三角矩阵.

7. $|A| = 0$，则 $r(A) < n$，故 $r(A^*) = \begin{cases} 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$. 当 $r(A^*) = 0$ 时，答案显然成立；当 $r(A^*) = 1$ 时，由矩阵秩的定义，任意两行（列）必成比例，否则秩大于 1，矛盾. 综上，原题得证.

8. $(\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，又 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$，因此该矩阵可逆，则 $(\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)$ 与 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 秩相等，因此这三个向量线性无关.

9. 只要取 $\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbf{R}^4$, 使得 $D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \neq 0$ 即可. 易得 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. 于是可取 $\alpha_3 = (0,0,1,0)^T, \alpha_4 = (0,0,0,1)^T$，能使得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 $\mathbf{R}^4$ 的一组基.

10. 考虑滚动消去法，每行减下一行，得

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \\ x & x & x & x & \dots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

第一行乘 $(-x)$ 到第 n 行，得

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \\ x^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-x \end{vmatrix}.$$

按第 n 行展开，得 $D_n = (1-x)^n + (-1)^{n+1}x^2T_{n-1}$，其中

$$T_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-x & 1 \end{vmatrix}.$$

按第 $n-1$ 行展开 T_{n-1}，有 $T_{n-1} = T_{n-2} + (-1)(1-x)T_{n-2} = xT_{n-2}$. 由 $T_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-x & 1 \end{vmatrix} = x$，递推得 $T_{n-1} = x^{n-2}$. 代入可解得 $D_n = (1-x)^n - (-x)^n$.

11. 按第一列展开，得 $D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i$.

12. 按第一列展开，得

$$\begin{aligned} D_n &= (a+b)D_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & a+b & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} \\ &= (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}. \end{aligned}$$

(1) 方法一：特征方程法. 有特征方程 $r^2-(a+b)r+ab = (r-a)(r-b) = 0$，先考虑 $a \neq b$，则 $D_n = C_1a^n + C_2b^n$，$D_1 = a+b$，$D_2 = a^2+ab+b^2$，则有

$$\begin{cases} C_1a + C_2b = a+b \\ C_1a^2 + C_2b^2 = a^2+ab+b^2 \end{cases},$$

考虑 Cramer 法则，首先判断系数行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab(b-a)$，若 $a=b=0$，原行列式为 0；若 $a=0, b\neq 0$，则有 $C_2=1$，$D_n=b^n$；同理若 $a=0, b\neq 0$，$D_n=a^n$. 考虑 $a\neq 0, b\neq 0$，则系数行列式非 0，根据 Cramer 法则可以解得

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix} a+b & b \\ a^2+ab+b^2 & b^2 \end{vmatrix}}{ab(b-a)}=\frac{a}{a-b},\quad C_2=\frac{\begin{vmatrix} a & a+b \\ a^2 & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix}}{ab(b-a)}=-\frac{b}{a-b}.$$

故 $D_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$. 考虑到 a 或 b 为 0 时也符合该公式，故合并为同一公式. 再考虑 $a=b$，则 $D_n=(C_1+C_2n)a^n$，有方程

$$\begin{cases}(C_1+C_2)a=2a \\ (C_1+2C_2)a^2=3a^2\end{cases},$$

$a=0$，则 $D_n=0$；$a\neq 0$，可以解得 $C_1=C_2=1$，有 $D_n=(n+1)a^n$. 考虑到 $a=0$ 时 D_n 也符合该式，故合并. 综上有

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a\neq b \\ (n+1)a^n, & a=b\end{cases}.$$

(2) 方法二：递推式变形法. 递推式变形, 得

$$\mathrm{D}_n-aD_{n-1}=b\left(D_{n-1}-aD_{n-2}\right),$$

由于 $D_1=a+b, D_2=a^2+ab+b^2$, 从而利用上述递推公式得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_n-aD_{n-1}&=b\left(D_{n-1}-aD_{n-2}\right)\\&=b^2\left(D_{n-2}-aD_{n-3}\right)\\&=\cdots=b^{n-2}\left(D_2-aD_1\right)=b^n.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}D_n&=aD_{n-1}+b^n=a\left(aD_{n-2}+b^{n-1}\right)+b^n\\&=\cdots=a^{n-1}D_1+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n\\&=a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n\\&=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a\neq b \\ (n+1)a^n, & a=b\end{cases}.\end{aligned}$$

13. 与数归法相同，先得到 D_n 的递推式：

$$D_n-2\cos\beta D_{n-1}+D_{n-2}=0,$$

其中 $D_1=\cos\beta$，$D_2=\cos 2\beta$.

现求其特征方程

$$\lambda^2-2\lambda\cos\beta+1=0$$

的根，有

$$\lambda=2\cos\beta\pm 2\mathrm{i}\sin\beta.$$

故令

$$D_n=C_1\cos n\beta+C_2\sin n\beta,$$

代入初值，有

$$\begin{cases}C_1\cos\beta+C_2\sin\beta=\cos\beta,\\ C_1\cos 2\beta+C_2\sin 2\beta=\cos 2\beta.\end{cases}$$

易知 $C_1=1, C_2=0$ 为其解，故 $D_n=\cos n\beta$.

14. (1) 方法一：慢慢消去.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9\\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9\\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9\\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 4\\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 4\\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 4\\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 4\end{vmatrix}\\ &= 4\begin{vmatrix}a^2 & 2a & 4a & 1\\ b^2 & 2b & 4b & 1\\ c^2 & 2c & 4c & 1\\ d^2 & 2d & 4d & 1\end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

(2) 关注到行列式中只有 $(a^2,b^2,c^2,d^2)^{\mathrm{T}},(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$ 和 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 三个线性无关列向量，则一眼看出线性相关. 因此设原行列式为 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4|$，有 $\alpha_4=\alpha_1-3\alpha_2+3\alpha_3$，因此原行列式值为 0.

15. (1)

$$D_n=\begin{vmatrix} D_{n-1} & a\\ b & a_n\end{vmatrix}, a=(0,\dots,0,-a_{n-1})^{\mathrm{T}}, b=(1,\dots,1)$$

$$=a_nD_{n-1}+a_{n-1}\begin{vmatrix} D_{n-2} & 1_{n-2}\\ 1_{n-2} & 1\end{vmatrix}\quad (1_{n-2}\text{ 表示由 }(n-2)\text{ 个 }1\text{ 构成的行/列向量})$$

$$=a_nD_{n-1}+a_{n-1}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 1\\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{vmatrix}\quad (1-n\text{ 列用第 }n\text{ 列减})$$

$$=a_nD_{n-1}+\prod_{i=1}^{n-1}a_i.$$

递推可得 $D_n=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$.

(2) 将 1 写成 $1+0$, 将 D 硬拆成 2^n 个行列式, 只有如下的 $n+1$ 个行列式非 0:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & & & \\ 1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & \vdots & \ddots & \\ & 1 & & a_n\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & 1\\ & a_2 & & 1\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{a_2}\prod_{k=1}^{n}a_k\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

16. (1) 行列式中 2 比较多，用全是 2 的第二行去消，然后按第 2 行展开.

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2\end{vmatrix}=2\cdot(-1)\cdot(n-2)!=-2(n-2)!.$$

(2) i. 方法一：考虑滚动消去法，有

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\
1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
0 & n+1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\
0 & n & 0 & \cdots & 0 & -n \\
0 & n & 0 & \cdots & -n & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & n & -n & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix}
n+1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\
n & 0 & \cdots & 0 & -n \\
n & 0 & \cdots & -n & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
n & -n & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \begin{vmatrix}
n+1 & n-1 & \cdots & 3 & 2 \\
n & -n & \cdots & 0 & 0 \\
n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
n & 0 & \cdots & 0 & -n
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{n^2-3n+8}{2}} \begin{vmatrix}
\frac{n(n+1)}{2} & n-1 & \cdots & 3 & 2 \\
0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -n
\end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n^2-n+12}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

ii. 方法二:考虑连加法. 将第 $2,3,\ldots,n$ 列都加到第 1 列, 提出公因子 $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, 再依次将第 $n-1$ 行乘 (-1) 加到第 n 行, $\cdots$, 第 2 行乘 (-1) 加到第 3 行, 第 1 行乘 (-1) 加到第 2 行, 然后对第 1 列展开, 得到一个 $n-1$ 阶行列式, 它的副对角元为 $1-n$, 其余元素均为 1 . 再把它的各列加到第 1 列, 并把它

的第 1 行乘 (-1) 加到其余各行, 得

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\1&3&\cdots&n&1\\1&4&\cdots&1&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&1&\cdots&1-n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&1&1-n&\cdots&1\\0&1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}_n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&1\\1&1-n&\cdots&1&1\\1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&1&\cdots&1&1-n\\0&0&\cdots&-n&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&-n&\cdots&0&n\\0&0&\cdots&0&n\end{vmatrix}_{n-1}$$

将上式先对第 1 列展开, 得到一个 $n-2$ 阶行列式, 再将它对最后一行展开, 得

$$D=\frac{-n(n+1)}{2}n\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&-n\\0&0&\cdots&-n&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&-n&\cdots&0&0\\-n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}_{n-3}$$

$$=-\frac{n^2(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}(-n)^{n-3}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

事实上，两种方法得到的答案是等价的.

17. (1) 若 $n=1$，则 $|A|=|0|=0$;

(2) 若 $n=2$, 则 $|A|=\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}=1$;

(3) 若 $n>2$，考虑使用滚动消去法：

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & -1 & -2 & \cdots & -n+1\\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -n+2\\ 2 & 1 & 0 & \cdots & -n+3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & -n+1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -n+2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -n+1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n+2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=0.$$

18. 我们可以先构造分块对角矩阵，然后分别处理两个低阶的行列式：

$$D=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & x & 0 & 0\\ 1 & 4 & x^2 & 0 & 0\\ 1 & 8 & x^3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2 & x\\ 1 & 4 & x^2\\ 1 & 8 & x^3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & x\\ 1 & 4 & x^2\\ 1 & 8 & x^3\end{vmatrix}.$$

该行列式可以通过加边法构造范德蒙行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & x\\ 1 & 4 & x^2\\ 1 & 8 & x^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & x\\ 0 & 1 & 4 & x^2\\ 0 & 1 & 8 & x^3\end{vmatrix}=2x(x-1)(x-2).$$

B 组

1. 这三小问实际上都是对原行列式中的某一行进行了替换进行计算.

(1)

$$A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix}3&0&4&1\\1&1&1&1\\0&-7&8&3\\5&3&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-3&1&-2\\1&0&0&0\\0&-7&8&3\\5&-2&-7&-3\end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3&1&-1\\-7&8&3\\-2&-7&-3\end{vmatrix}$$
$$=148.$$

(2)

$$A_{31}+A_{33}=1A_{31}+0A_{32}+1A_{33}+0A_{34}=\begin{vmatrix}3&0&4&1\\2&3&1&4\\1&0&1&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3&0&4&1\\2&1&1&4\\1&0&1&0\\5&1&-2&2\end{vmatrix}$$
$$=3\begin{vmatrix}3&0&1&1\\2&1&-1&4\\1&0&0&0\\5&3&-7&2\end{vmatrix}=3\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1&1\\1&-1&4\\3&-7&2\end{vmatrix}$$
$$=-12.$$

(3)

$$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=-A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}3&0&4&1\\2&3&1&4\\0&-7&8&3\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}3&3&1&4\\2&5&-1&6\\0&-7&8&3\\-1&0&0&0\end{vmatrix}=-1^{4+1}\cdot(-1)\begin{vmatrix}3&1&4\\5&-1&6\\-7&8&3\end{vmatrix}$$
$$=-78.$$

2. 有问题，之后可能会考虑修改题目，此处略.

3.

$$\begin{aligned}|A+B^{-1}| &= |B^{-1}BA+B^{-1}E| = |B^{-1}|\cdot|BA+E| \\ &= \frac{1}{2}|BA+A^{-1}A| = \frac{1}{2}|B+A^{-1}|\cdot|A| \\ &= \frac{3}{2}|A^{-1}+B| = 3.\end{aligned}$$

4. 正交矩阵满足 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E$，所以 $|AA^{\mathrm{T}}|=|A|^2=|E|=1$. 而 $|A|<0$，所以 $|A|=-1$.

$$|E+A|=|AA^{\mathrm{T}}+A|=|A|\cdot|A^{\mathrm{T}}+E|=-|(A+E)^{\mathrm{T}}|=-|E+A|.$$

故 $|E+A|=0$.

以上两道题都多次运用了 $E=AA^{-1}=A^{-1}A$ 的技巧，请大家留意.

5. 由 A 为三阶矩阵，可得 $|A|^2=|A^*|=1$，而 $|A|>0$，所以 $|A|=1$. $AB=E+3A$ 经变形可得 $A(B-3E)=E$，故有

$$B=3E+A^{-1}=3E+\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\1&0&4\end{pmatrix}.$$

6. $|B|=1$，对 $BA=B^{\mathrm{T}}B$ 两边同时取行列式有

$$|B||A|=|B^{\mathrm{T}}||B|=|B|^2,$$

故 $|A|=1$. 从而有

$$A^*=|A|A^{-1}=B^{-1}\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}B.$$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，于是有

$$|A^*-2E|=|B^{-1}\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}B-2B^{-1}B|=|B^{-1}||\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}-2E||B|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\-1&-1&0\\0&-1&-1\end{vmatrix}=-1.$$

7. (1) 由于行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&a_{n-1,3}&\cdots&a_{n-1,n}\end{vmatrix}=0,$$

而 $M_1, -M_2, \ldots, (-1)^{n-1}M_n$ 恰是 D 的第一行元素的代数余子式，所以将 D 按第一行展开，可知

$$a_{11}M_1 + a_{12}(-M_2) + \cdots + a_{1n}(-1)^{n-1}M_n = 0.$$

而 D 的其他行元素与第一行元素的代数余子式乘积之和为 0，于是结论成立.

(2) 因为 $r(A) = n-1$，所以 $M_1, -M_2, \ldots, (-1)^{n-1}M_n$，不全为 0. 且该方程组解空间维数为 1，$M_1, -M_2, \ldots, (-1)^{n-1}M_n$ 正是该方程组的非零解，结论成立.

8. $A^* = |A|A^{-1} = 2A^{-1}, B^* = |B|B^{-1} = B^{-1}$，故

$$|2A^*B^* - A^{-1}B^{-1}| = |4A^{-1}B^{-1} - A^{-1}B^{-1}| = |3A^{-1}B^{-1}| = \frac{3^n}{|A||B|} = \frac{3^n}{2}.$$

9. (1) 设 $A = (a_{ij})$，则 $A^* = (A_{ji})$（A^* 的表达式）. 而 $A^T = A^*$，有 $a_{ij} = A_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$. 而 A 非零，故 $\exists a_{kl} \neq 0$，从而有

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = a_{k1}^2 + \cdots + a_{kn}^2 > 0.$$

(2) $|A| > 0$ 有 A 是可逆的，故 $A^* = |A|A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，从而 $A^{\mathrm{T}}A = |A|E$. 两侧取行列式有 $|A|^2 = |A|^n$，结合 $|A| > 0$ 有 $|A| = 1$.

(3) $|A| = 1$，故 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，A 是正交矩阵.

(4)

$$\begin{aligned}|E - A| &= |AA^{\mathrm{T}} - AE| = |A||A^{\mathrm{T}} - E| = |A^{\mathrm{T}} - E| = |(A-E)^{\mathrm{T}}| \\ &= |A - E| = (-1)^n|E - A|.\end{aligned}$$

n 为奇数，则 $|E - A| = -|E - A|$，即 $|E - A| = 0$.

10. $r(A) = n-1$，则 $|A| = 0$ 且 $AX = 0$ 的解空间的维数为 1. 而考虑 $AA^* = |A|E = 0$，且 $\exists A_{ij} \neq 0$，所以 $(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in})^{\mathrm{T}}$ 是所求的基础解系.

11. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n-1,1} & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n-1,2} & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & \cdots & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{n-1,n} & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

注意到目标行列式是 A^* 中元素 A_{nn} 的代数余子式，也就是 $(A^*)^*$ 中 (n,n) 位置的元素. 由例 13.9(4) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$ 可知结论成立.

12. 设 $f_i(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-2}x^{n-2}\in R[x]_{n-1}$，由于 $n-1$ 维线性空间中的 n 个向量必线性相关，我们可以得到 $\{f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x)\}$ 线性相关. 即存在不全为零的 $k_1,k_2,\ldots,k_n$，使得 $\forall x\in\mathbb{R},k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_nf_n(x)=0$. 设原行列式的行向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$，则有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}.$$

原行列式的行向量组线性相关，因此其值为 0.

13. 令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),B=\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2&\cdots&\alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{pmatrix}$，显然 $B=A^{\mathrm{T}}A$，由 11.4 秩不等式第 4 个 有 $r(B)=r(A)$. 进而 n 维向量组 $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 线性无关等价于 $r(A)=n$，也就等价于 $r(B)=n$，进而等价于 $|B|\neq0$，命题得证.

14. ($\Longrightarrow$) 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),\varepsilon_i=(0,\ldots,1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$(第 i 个为 1)$,E=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 n 维线性无关的向量组,故 $|A|\neq0$,即 A 可逆,$A=EA,AA^{-1}=E$,

$$(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)A,(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)A^{-1}.$$

即 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 等价. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，能表出任一 n 维向量，故 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 能表出 $\mathbf{R}^n$ 中任一 n 维向量.

($\Longleftarrow$) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 能表出任一 n 维向量，则 $\varepsilon_i=\lambda_{i1}\alpha_1+\cdots+\lambda_{in}\alpha_n,i=1,2,\ldots,n$. 即

$$E=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{21}&\cdots&\lambda_{n1}\\\lambda_{11}&\lambda_{21}&\cdots&\lambda_{n1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda_{11}&\lambda_{21}&\cdots&\lambda_{n1}\end{pmatrix}.$$

进而 $|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n|\begin{vmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{21}&\cdots&\lambda_{n1}\\\lambda_{11}&\lambda_{21}&\cdots&\lambda_{n1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda_{11}&\lambda_{21}&\cdots&\lambda_{n1}\end{vmatrix}=1$,所以 $|\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n|\neq0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关.

15. A 的前 s 列组成的 s 阶子式为 Vandermonde 行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & a & a^2 & \cdots & a^{s-1}\\ 1 & a^2 & a^4 & \cdots & a^{2(s-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a^s & a^{2s} & \cdots & a^{s(s-1)}\end{vmatrix}.$$

由于当 $0<r<n$ 时，$a^r\neq 1$，因此 $a,a^2,\ldots,a^s$ 两两不同，进而 $D\neq 0$，于是 $r(A)\geqslant s$. 又因为 A 的行数是 s，所以 $r(A)\leqslant s$. 从而 $r(A)=s$.

由于 $D\neq 0$，故 D 的列向量线性无关，因此 A 的前 s 个列向量即为其列向量组的一个极大线性无关组.

16. (1) 线性变换的验证省略.

(2) ($\Longrightarrow$) 若 $|AB|=0$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$，故 A 或 B 不可逆. 不妨假设 A 不可逆，则存在 $X_0\neq 0$ 使得 $AX_0=0$，$T(X_0)=AX_0B=0$. 但 T 是可逆的，所以 T 是单射，$T(X)=0\Leftrightarrow X=0$，矛盾.

($\Longleftarrow$) $|AB|\neq 0$ 则 A,B 可逆，故 $T(X)=AXB$ 的逆映射为 $T^{-1}(X)=A^{-1}XB^{-1}$.

17. 因为 $r(A)<n, A_{11}\neq 0$，所以 $r(A)=n-1$，进而由例 13.9 (6) 可知 $r(A^*)=1$，所以有

$$A^*=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n).$$

设 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=k$，则

$$\begin{aligned}(A^*)^2&=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\\ &=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\cdot k\cdot(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=k\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=kA^*.\end{aligned}$$

18. $\forall a_i \in \mathbf{R}, i \in \mathbf{Z}_+$ 满足：若 $i \neq j$，则 $a_i \neq a_j$，考虑以 Vandermonde 行列式的形式进行排布. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_k^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_k^{n-1} & \cdots \end{pmatrix}.$$

考虑 A 的任意 n 阶主子式 D_n，其均构成 Vandermonde 行列式，又 $i \neq j$ 有 $a_i \neq a_j$，所以值均不为 0，也就是说任意 n 个向量都线性无关，其个数也恰好为 n，构成 V 的一组基，命题得证.

19. 易证以 0 为极限的实数数列全体可以构成一个线性空间 W，下使用反证法证明 W 为无限维线性空间：

假设 W 为有限维线性空间，不妨设 $\dim W = k$.

取 W 中的 $k+1$ 个数列 $\{a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(k)}, a_n^{(k+1)}\}$，满足 $a_n^{(i)} = (i+1)^{-n} \to 0^+ \ (n \to +\infty)$. 分别取这 $k+1$ 个数列的前 $k+1$ 项，构造 Vandermonde 行列式：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^{-1} & 3^{-1} & \cdots & (k+2)^{-1} \\ 2^{-2} & 3^{-2} & \cdots & (k+2)^{-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{-(k-1)} & 3^{-(k-1)} & \cdots & (k+2)^{-(k-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

故行列式的列向量线性无关. 由于线性无关的向量组在补充分量后仍然线性无关，我们可以得到 $k+1$ 个数列 $\{a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \cdots, a_n^{(k)}, a_n^{(k+1)}\}$ 线性无关，这与 $\dim W = k$ 矛盾，因此 W 为无限维线性空间.

20. (1) 连加法得结果为 160；

 (2) 连加法得结果为 $(\lambda-1)(\lambda+3)^3$；

 (3) 如果对数据敏感能看出线性相关，可以直接由 $\alpha_4 - \alpha_1 = 3(\alpha_3 - \alpha_2)$ 证得其线性相关，则为 0. 也可以使用滚动消去法，如

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

 (4) 当然是递推法的常见形式，但是只有 4 阶，所以可以暴算，转化为上三角行列

式，如

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{31}{15} \end{vmatrix} = 31.$$

21. 暴力拆成 2^n 个行列式，其中只有 2 个每列各不相同，其他都因为有相同列而为 0. 因此有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 & a_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n & a_1^n \end{vmatrix} \\
&= (1+(-1)^{n-1}) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{vmatrix} \\
&= (1+(-1)^{n-1}) \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= (1+(-1)^{n-1}) \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).
\end{aligned}$$

22. (1) 可以硬拆成 8 个行列式，其中只有 2 个非零，则得到

$$D = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = (a^3+b^3)(3xyz - \sum x^2),$$

另解：分解成两个矩阵相乘再各自求行列式. 这其实是看出这是一种线性变换的本质之后的做法：

$$D = \left| \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} \right|.$$

(2) 其实直接用三阶行列式的公式也不错，这里介绍基于硬拆的方法

$$
\begin{aligned}
D &= x\begin{vmatrix} x & xy & xz \\ y & y^2+1 & yz \\ z & yz & z^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & xy & xz \\ 0 & y^2+1 & yz \\ 0 & yz & z^2+1 \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2+1 & yz \\ yz & z^2+1 \end{vmatrix} = \sum x^2+1.
\end{aligned}
$$

23. 利用 $|\lambda E_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda E_n - BA|$

$$
\begin{aligned}
|2E-\alpha_1^{\mathrm{T}}\beta_1-\alpha_2^{\mathrm{T}}\beta_2| &= \left|2E-\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}} & \alpha_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix}\right| = 2^{n-2}\left|2E-\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}} & \alpha_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\right| \\
&= 2^{n-2}\begin{vmatrix} 2-\beta_1\alpha_1^{\mathrm{T}} & -\beta_1\alpha_2^{\mathrm{T}} \\ -\beta_2\alpha_1^{\mathrm{T}} & 2-\beta_2\alpha_2^{\mathrm{T}} \end{vmatrix} \\
&= 2^{n-2}\left(\left(2-\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)\left(2-\sum_{i=1}^n c_id_i\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_ic_i\right)\right)
\end{aligned}
$$

24. 设所求 $2n$ 阶行列式为 D.

(1) 若 $a=0$，则

$$
D = \begin{vmatrix} 0 & & & & & b \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & b & & \\ & & b & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ b & & & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{2n(2n-1)}{2}} \begin{vmatrix} b & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & b & 0 & & \\ & & 0 & b & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & b \end{vmatrix} = b^{2n}.
$$

(2) 若 $b\neq 0$，我们将第 i 列乘以 $-\dfrac{b}{a}$ 后加到第 $2n-i+1$ 列，化为下三角矩阵：

$$
D = \begin{vmatrix} a & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a & 0 & & \\ & & b & a-\frac{b^2}{a} & & \\ & & & & \ddots & \\ b & & & & & a-\frac{b^2}{a} \end{vmatrix} = a^n(a-\frac{b^2}{a})^n = (a^2-b^2)^n.
$$

C 组

1.

3. 设 $a_{ij}=|A|b_{ij}$，其中 b_{ij} 为整数，则

$$|A|=\begin{vmatrix} |A|b_{11} & |A|b_{12} & \cdots & |A|b_{1n} \\ |A|b_{21} & |A|b_{22} & \cdots & |A|b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |A|b_{n1} & |A|b_{n2} & \cdots & |A|b_{nn} \end{vmatrix} = |A|^n \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

由此可得

$$|A|^{n-1}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = 1.$$

由于 a_{ij} 与 b_{ij} 均为整数，所以 $|A|$ 与 $|b_{ij}|_{n\times n}$ 也为整数，且 $|A|\neq 0$，所以 $|A|=\pm 1$.

4. 使用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=\left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{11}(t)\right|$，结论成立.

假设 $n=k-1$ 时结论成立，下证 $n=k$ 时结论也成立. 设 $G_{ij}(t)$ 为 $F(t)$ 对 $f_{ij}(t)$ 的代数余子式，将 $F(t)$ 按第一列展开：

$$F(t)=\sum_{i=1}^{k} f_{i1}(t)G_{i1}(t),$$

对 t 求导，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\mathrm{d}f_{i1}(t)}{\mathrm{d}t}G_{i1}(t)+\sum_{i=1}^{k}f_{i1}(t)\frac{\mathrm{d}G_{i1}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

上式第一部分和即为 $F_1(t)$. 下求第二部分的和：

设 $F_{ij}(t)$ 为 $F_j(t)$ 对 f_{i1} 的代数余子式，即

$$F_{ij}(t)=\begin{vmatrix} f_{12}(t) & f_{13}(t) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{1j}(t) & \cdots & f_{1k}(t) \\ f_{22}(t) & f_{23}(t) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{2j}(t) & \cdots & f_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{i-1,2}(t) & f_{i-1,3}(t) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{i-1,j}(t) & \cdots & f_{i-1,k}(t) \\ f_{i+1,2}(t) & f_{i+1,3}(t) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{i+1,j}(t) & \cdots & f_{i+1,k}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{k2}(t) & f_{k3}(t) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{kj}(t) & \cdots & f_{kk}(t) \end{vmatrix}.$$

将第二部分中的 $\dfrac{\mathrm{d}G_{i1}(t)}{\mathrm{d}t}$ 按归纳假设展开，可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} f_{i1}(t)\frac{\mathrm{d}G_{i1}(t)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=2}^{k} F_{ij}(t)f_{i1}(t) \\ &= \sum_{j=2}^{k}\sum_{i=1}^{k} F_{ij}(t)f_{i1}(t) \\ &= \sum_{j=2}^{k} F_j(t).\end{aligned}$$

与第一部分合并可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=\sum_{j=1}^{n} F_j(t).$$

5. 对原矩阵进行分块初等变换化为上三角块矩阵后进行计算. 因为 $|A|\neq 0$，所以 A 可逆，进而有如下变换：

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} &= |A||D-CA^{-1}B| = |AD-ACA^{-1}B|.\end{aligned}$$

由于 $AC=CA$，所以有 $ACA^{-1}=CAA^{-1}=C$，所以

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

6. 这道题目我们利用了一个分块矩阵作为中间“桥梁”使得其通过分块初等变换之后能分别得到两个方向上的结果. 考虑矩阵 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}$，有

$$\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ \beta^{\mathrm{T}} & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A+\alpha\beta^{\mathrm{T}} & \alpha \\ O & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & O \\ \beta^{\mathrm{T}} & E \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A+\alpha\beta^{\mathrm{T}} & \alpha \\ O & 1 \end{vmatrix}=|A+\alpha\beta^{\mathrm{T}}|.$$

另一方面，

$$\begin{pmatrix} E & O \\ \beta^{\mathrm{T}}A^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ O & 1+\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha \end{pmatrix}.$$

注意 $\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha$ 的最终结果是一个数. 进而

$$\begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & O \\ \beta^{\mathrm{T}}A^{-1} & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & \alpha \\ -\beta^{\mathrm{T}} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & \alpha \\ O & 1+\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha \end{vmatrix}=|A|(1+\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha).$$

所以有

$$|A+\alpha\beta^{\mathrm{T}}|=|A|(1+\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha).$$

7. 依旧是对分块矩阵做初等分块变换. 考虑到

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -E \\ O & E \end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{pmatrix},\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} E & E \\ O & E \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & -E \\ O & E \end{vmatrix}&=\begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix}\\&=|(A+B)(A-B)|=|A+B||A-B|\end{aligned}$$

8. 首先有 $\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}=|A||D|-|B||C|.$

(1) 若 $|A| \neq 0$，即 A 可逆. 因为矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，所以由

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

条件 $r\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = n$ 以及 A 可逆，可以得到

$$D - CA^{-1}B = O.$$

即若 A 可逆，则 $D = CA^{-1}B$，并且

$$\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix} = |A||CA^{-1}B| - |B||C| = |A||C||A^{-1}||B| - |B||C| = 0.$$

(2) 若 $|A| = 0$，只需证 $|B||C| = 0$. 若 $|B| \neq 0$，则由

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -DB^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -B^{-1}A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B \\ C-DB^{-1}A & O \end{pmatrix},$$

有 $C - DB^{-1}A = O$. 注意到 $|A| = 0$，故

$$|C| = |DB^{-1}A| = |D||B^{-1}||A| = 0.$$

同理可证若 $|C| \neq 0$，则 $|B| = 0$.

综上，结论成立.

9. 由 $|A| = 0$ 可知 $r(A) < n$. 利用结论

$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$$

可知 $r(A^*) \leqslant 1$.

若 $r(A^*) = 0$，则 $A^* = O$，故 $A_{ii} = A_{jj} = A_{ij} = 0$，自然有 $A_{ii}A_{jj} = (A_{ij})^2$；

若 $r(A^*) = 1$，则 A^* 的任意两个列向量线性相关，可得 $A_{ii}A_{jj} = A_{ij}A_{ji}$. 又由 A 是实对称矩阵，有 $A_{ij} = A_{ji}$，因此 $A_{ii}A_{jj} = (A_{ij})^2$.

10. (1) 设 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$. 而 $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$，所以有

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = |A||B|\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}.$$

得到方程组

$$\begin{cases} AX + CZ = |A||B|E \\ AY + CW = O \\ BZ = O \\ BW = |A||B|E \end{cases}.$$

考虑一般情况，我们不再单独讨论 B 是否等于 O. 所以 $Z = O$, $X = |B|A^*$, $W = |A|B^*$, $Y = -A^*CB^*$. 即

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*CB^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}.$$

(2) 若 A 可逆，则可以通过以下的初等分块变换将其化为上三角块矩阵.

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

两侧取伴随有

$$\left(\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right)^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}^*$$
$$= \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |D - CA^{-1}B|A^* & -A^*B(D - CA^{-1}B)^* \\ O & |A|(D - CA^{-1}B)^* \end{pmatrix}$$

, 而

$$\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{vmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^* \\ =& \begin{pmatrix} |D - CA^{-1}B|A^* & -A^*B(D - CA^{-1}B)^* \\ O & |A|(D - CA^{-1}B)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} |D - CA^{-1}B|A^* + A^*B(D - CA^{-1}B)^*CA^{-1} & -A^*B(D - CA^{-1}B)^* \\ -|A|(D - CA^{-1}B)^*CA^{-1} & |A|(D - CA^{-1}B)^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11. (1) 因为 $n = 2$ 时 $(A^*)^* = A$，所以 $B = (B^*)^* = A^*$，而 B 的伴随矩阵是唯一的，所以存在唯一的 2 阶方阵 $A = B^*$ 使得 $A^* = B$.

(2) ($\Longleftarrow$) 由例 13.9(6) 可得.

($\Longrightarrow$)

i. $r(B)=n$ 时，若存在 A 使得 $A^*=B$，则由 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，有

$$A=\frac{1}{|A|^{n-2}}(A^*)^*=\frac{1}{|A|^{n-2}}B^*=\frac{1}{|A|^{n-2}}|B|B^{-1},$$

而

$$|B|=|A^*|=|A|^{n-1},$$

代入上式可得

$$A=|A|B^{-1}=\sqrt[n-1]{|B|}B^{-1}.$$

从而满足 $A^*=B$ 的矩阵 A 存在，且有 $n-1$ 个.

ii. $r(B)=1$ 时，存在可逆矩阵 P,Q 使得

$$B=P\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}Q.$$

若存在 A 满足 $A^*=B$，则 $r(A)=n-1$，从而存在可逆矩阵 G,H 使得

$$A=G\begin{pmatrix}0 & O\\ O & E_{n-1}\end{pmatrix}H,$$

则

$$A^*=H^*\begin{pmatrix}0 & O\\ O & E_{n-1}\end{pmatrix}^*G^*=H^*\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}G^*=|HG|H^{-1}\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}G^{-1},$$

由 $A^*=B$ 可得

$$|HG|H^{-1}\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}G^{-1}=P\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}Q,$$

即

$$|HG|\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}=HP\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}QG,$$

记 $C=HP$, $D=QG$，且分块为 $C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{pmatrix}$，其中 C_{22},D_{22} 是 $n-1$ 阶矩阵，则

$$|HG|\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}D_{11} & C_{11}D_{12}\\ C_{21}D_{11} & C_{21}D_{12}\end{pmatrix},$$

于是

$$|HG|=C_{11}D_{11}, C_{11}D_{12}=O, C_{21}D_{11}=O, C_{21}D_{12}=O.$$

因为 H,G 可逆，所以 $C_{11}\neq 0, D_{11}\neq 0$，于是 $C_{21}=O=D_{12}$. 从而

$$\begin{aligned}A&=G\begin{pmatrix}0&O\\O&E_{n-1}\end{pmatrix}H=Q^{-1}D\begin{pmatrix}0&O\\O&E_{n-1}\end{pmatrix}CP^{-1}\\&=Q^{-1}\begin{pmatrix}D_{11}&O\\D_{21}&D_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&O\\O&E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\O&C_{22}\end{pmatrix}P^{-1}\\&=Q^{-1}\begin{pmatrix}0&O\\O&D_{22}C_{22}\end{pmatrix}P^{-1}.\end{aligned}$$

又

$$C_{11}D_{11}=|HG|=|CP^{-1}Q^{-1}D|=\frac{1}{|PQ|}|DC|.$$

接下来转为求 $|DC|$. 而

$$DC=\begin{pmatrix}D_{11}&O\\D_{21}&D_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\O&C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_{11}C_{11}&D_{11}C_{12}\\D_{21}C_{11}&D_{21}C_{12}+D_{22}C_{22}\end{pmatrix}.$$

考虑初等分块变换

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&O\\-D_{21}D_{11}^{-1}&E_{n-1}\end{pmatrix}DC&=\begin{pmatrix}1&O\\-D_{21}D_{11}^{-1}&E_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{11}C_{11}&D_{11}C_{12}\\D_{21}C_{11}&D_{21}C_{12}+D_{22}C_{22}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}D_{11}C_{11}&D_{11}C_{12}\\O&D_{22}C_{22}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故

$$C_{11}D_{11}=\frac{1}{|PQ|}|DC|=\frac{1}{|PQ|}D_{11}C_{11}|D_{22}C_{22}|,$$

从而

$$\frac{1}{|PQ|}|D_{22}C_{22}|=1,$$

即

$$|D_{22}C_{22}|=|PQ|.$$

命题得证.

iii. $r(B)=0$ 则是平凡情况，其是所有 $r\leqslant n-2$ 矩阵的伴随矩阵.

(3) 由 $r(B^*)=r(A)=1$ 可知 $r(B)=2$. $B^*B=|B|E=0$，由此可知 B 的列向量为方程组 $B^*X=0$ 的解，其基础解系为

$$\alpha_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1+k_2,-k_1,-k_2)^{\mathrm{T}}$. 由 $BB^*=0$ 解得 $k_1=k_2=1$，从而

$$B=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

12. 我们将第 i 行乘 (-1) 加到第 $i-1$ 行（i 依次取 $n, n-1, \ldots, 2$），再对第 1 列展开，

$$D_n = \begin{vmatrix} a-b & c-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & c-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c-a \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1}b(c-a)^{n-1},$$

有了递推式，但是递推式中有 $(-1)^{n+1}$，递推比较麻烦可能还需要处理. 如果用数归证明的话应该可以直接下手了，但是有更聪明的办法：取转置，则行列式的值不变，但是 b 与 c 的位置交换，由此可以写出 D_n 的第二个递推式：$D_n = (a-c)D_{n-1} + (-1)^{n+1}c(b-a)^{n-1}$. 两个递推式分别乘以 $a-c$ 与 $a-b$ 后相减即有

$$D_n = \frac{b(a-c)^n - c(a-b)^n}{b-c}.$$

13. (1) $n=1$ 时，显然有 $|A| = a_1 b_1$.

(2) $n \geqslant 2$ 时，

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

故 $r(A) = 1 < n$，A 不可逆，因此 $|A| = 0$.

14. 设

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix},$$

利用行列式公理化定义中的线性性，有

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & 0 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= a_n \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1 \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + D_{n-1} \\
&= a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \\
&= D_{n-1} + a_n^2.
\end{aligned}$$

而 $D_1 = 1 + a_1^2$, 因此

$$|A| = D_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

15. 使用硬拆法，将 A 的第 i 行分解为 $(1,1,\ldots,1)+(x_i,x_i^2,\ldots,x_i^n)$. 考虑到拆出的行列式中包含不少于两列为 $(1,1,\ldots,1)$ 的项均为 0，因此可将 $|A|$ 化简为

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \cdots & x_{i-1}^n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \cdots & x_{i+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

上式中第一项可利用 Vandermonde 行列式化简：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} x_i \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)\right).$$

对于第二项，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \cdots & x_{i-1}^n \\
1 & 1 & \cdots & 1 \\
x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \cdots & x_{i+1}^n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix}
x_1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{i-1} & x_{i-1}(x_{i-1}-1) & \cdots & x_{i-1}^{n-1}(x_{i-1}-1) \\
1 & 0 & \cdots & 0 \\
x_{i+1} & x_{i+1}(x_{i+1}-1) & \cdots & x_{i+1}^{n-1}(x_{i+1}-1) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_n & x_n(x_n-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1)
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
x_1-1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{i-1}-1 & x_{i-1}(x_{i-1}-1) & \cdots & x_{i-1}^{n-1}(x_{i-1}-1) \\
1 & 0 & \cdots & 0 \\
x_{i+1}-1 & x_{i+1}(x_{i+1}-1) & \cdots & x_{i+1}^{n-1}(x_{i+1}-1) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_n-1 & x_n(x_n-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1)
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+1}\prod_{j\neq i}(x_j-1)\begin{vmatrix}
1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_{i-1} & \cdots & x_{i-1}^{n-1} \\
1 & x_{i+1} & \cdots & x_{i-1}^{n+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+1}\prod_{j\neq i}\frac{x_j-1}{x_j-x_i}\prod_{1\leqslant k<j\leqslant n}(x_j-x_k).
\end{aligned}$$

综上可得，

$$|A| = \left(\prod_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}\prod_{j\neq i}\frac{x_j-1}{x_j-x_i}\right)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

16. (1) 若 $y=z$，则

$$|A| = \begin{vmatrix}
x_1 & y & y & \cdots & y \\
y & x_2 & y & \cdots & y \\
y & y & x_3 & \cdots & y \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y & y & y & \cdots & x_n
\end{vmatrix}.$$

i. 若存在 $i\neq j$，使得 $x_i=x_j=y$，则 A 中有两列元素全为 y，因此 $|A|$ 为 0.

ii. 若存在唯一 i，使得 $x_i = y$，则

$$
\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{i-1+i-1}\begin{vmatrix} x_i & y & y & \cdots & y \\ y & x_1 & y & \cdots & y \\ y & y & x_2 & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y & y & y & \cdots & y \\ 0 & x_1-y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-y \end{vmatrix} \\
&= y\prod_{j\neq i}(x_j-y).
\end{aligned}
$$

iii. 若不存在 i，使得 $x_i = y$，则

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & y & y & y & \cdots & y \\ 0 & x_1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & y & x_2 & y & \cdots & y \\ 0 & y & y & x_3 & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & y & y & y & \cdots & x_n \end{vmatrix}_{n+1} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & y & y & y & \cdots & y \\ -1 & x_1-y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2-y & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x_3-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-y \end{vmatrix}_{n+1} \\
&= \begin{vmatrix} 1+\sum_{j=1}^n \frac{y}{x_j-y} & y & y & y & \cdots & y \\ 0 & x_1-y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2-y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-y \end{vmatrix} \\
&= \prod_{j=1}^n (x_j-y) + y\sum_{i=1}^n\prod_{j\neq i}(x_j-y).
\end{aligned}
$$

综上，当 $y=z$ 时，

$$|A|=\prod_{j=1}^{n}(x_j-y)+y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-y).$$

(2) 若 $y\neq z$，则可按照与第 10 题完全相同的方法进行处理，最后得到

$$|A|=\frac{z\prod_{i=1}^{n}(x_i-y)-y\prod_{i=1}^{n}(x_i-z)}{z-y}.$$

第 11 讲　朝花夕拾

A 组

1. (1) 参考教材定理 6.1.

(2) 提示. 考虑 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. 令 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$.

$AX = 0 \implies x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$

只有零解表明 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性无关，故 A 列满秩，$r(A) = n$.

有非零解（无穷解）则相反.

(3) 提示同上.

(4) 参考教材定理 6.2.

(5) $A(k_1X_1 + \cdots + k_sX_s) = k_1AX_1 + \cdots + k_sAX_s = 0 + \cdots + 0 = 0.$

(6) $A(k_1X_1 + \cdots + k_sX_s + \eta_0) = k_1AX_1 + \cdots + k_sAX_s + A\eta_0 = b$

(7) $A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0$

(8) 令 $\bar{X} = k_1X_1 + \cdots + k_sX_s$，有

$$\begin{aligned} A\bar{X} = b &\iff A(k_1X_1 + \cdots + k_sX_s) = b \\ &\iff k_1AX_1 + \cdots + k_sAX_s = b \\ &\iff (k_1 + \cdots + k_s)b = b \\ &\iff k_1 + \cdots + k_2 = 1 \quad (b \neq 0). \end{aligned}$$

(9) 类似上题.

(10) 错误.

必要性正确. 令 A 为 $m \times n$ 的矩阵，则 $AX = b$ 有唯一解表明 $r(A) = n$. 而 $r(A) = n \implies AX = 0$ 只有零解成立.

充分性错误. 注意到 $AX = 0$ 只有零解 $\implies r(A) = n$. 但 $r(A) = m$ 不代表 $AX = b$ 有唯一解，因为还有无解的可能.

(齐次线性方程组一定有解，但非齐次线性方程组不一定有解，一定要注意这个差别)

简单的反例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(11) 正确. 令 $B=(\beta_1,\dots,\beta_s)$. $AB=0 \implies A(\beta_1,\dots,\beta_s)=0$, 即 $(A\beta_1,\dots,A\beta_s)=0$, 故 B 的列向量为方程组 $AX=0$ 的解.（注：$A(\beta_1,\dots,\beta_s)=(A\beta_1,\dots,A\beta_s)$ 利用分块矩阵性质即可）

(12) 利用上一题的结论易知正确.

(13) 设 A 的解空间为 $N(A)$，B 的解空间为 $N(B)$，则由题意有 $N(A)\subseteq N(B)$，故 $\dim N(A)\leqslant \dim N(B)$. 而 $r(A)+\dim N(A)=r(B)+\dim N(B)$（参考第 1 题），故 $r(A)\geqslant r(B)$ 正确.

(14) 错误.

必要性正确. $AX=0$ 与 $BX=0$ 为同解方程组可得 $N(A)=N(B) \implies \dim N(A)=\dim N(B)$. 同上一题，可得 $r(A)=r(B)$.

充分性错误. 反例有 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

实际上, 只需考虑解空间均为 $\mathbf{R}^n$ 的子空间, $\mathbf{R}^n=\mathrm{span}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. 令 $N(A)=\mathrm{span}(\alpha_i), N(B)=\mathrm{span}(\alpha+j), i\neq j$ 即为反例.

2. $r(A^*)=\begin{cases}1 & r(A)=3\\ 0 & r(A)<3\end{cases}$，而已知 $A_{21}\neq 0$，故 $r(A^*)=1$，故 $r(A)=3$，故 $AX=0$ 解空间维数为 $4-r(A)=1$. 而 $|A|=0$，由行列式展开可知

$$a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+a_{i3}A_{23}+a_{i4}A_{24}=0 \qquad i=1,2,3,4$$

故解为 $k(A_{21},A_{22},A_{23},A_{24})^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathbf{R}$.

3. 由题意得 $r(A)=3<4$ 且 $\alpha_1-4\alpha_3=0$，或 $\alpha_1=4\alpha_3$. 由 $r(A)=3$ 得 $r(A^*)=1$, $A^*X=0$ 的基础解系含 3 个线性无关的解向量. 由 $A*A=|A|E=O$ 得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 $A^*X=0$ 的解，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 或 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 $A^*X=0$ 的基础解系.

4. $\forall\alpha\in\mathbf{R}^n, \alpha^{\mathrm{T}}A\beta=0 \implies A\beta=0$.

5. $r(A)=3 \implies \dim N(A)=4-r(A)=1$.

$\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4 \implies$ 特解为 $(1,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$

$\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0 \implies$ 导出组基础解系为 $(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

故通解为 $k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}+(1,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$，$k\in\mathbf{R}$

6. 设方程组 $Ax=b$，由 $r(A)=3$ 知其导出组 $Ax=0$ 的基础解系只含一个解向量.

而 $A\eta_1=b, A(\eta_2+\eta_3)=2b$，故 $2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$ 为 $Ax=0$ 的基础解系，从而所求通解为

$$x=\eta_1+c(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}+c(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$$

其中 c 为任意常数.

7. (1) 取 $\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_3$(取法不唯一), 有 $A(\beta_1-\beta_2)=A(\beta_1-\beta_3)=0$ 且 $\beta_1-\beta_2,\beta_1-\beta_3$ 线性无关，否则 β_1,β_2,β_3 线性相关.

   (2) 取 $2\beta_1+k_1(\beta_1+\beta_2)+k_2(\beta_2+\beta_3)$ 可行（取法不唯一）.

8. 对于任意的 $b_{s\times 1}$，$AX=b$ 都有解，说明 A 的列向量可以线性表出出任意 s 维向量 b，从而 $r(A)\geqslant s$，而 $r(A)\leqslant s$，所以 $r(A)=s$.

   反之，如果 $r(A)=s$，则 A 有 s 个线性无关的列向量，它们就是 s 维空间 V 的一组基，对于 V 中任意向量 b，都可以由 A 的列向量线性表出，从而 $AX=b$ 有解.

   当然，也可以直接用秩不等式: $s=r(A)\leqslant r(A,b)\leqslant s$ 得到 $r(A,b)=s$, 所以 $AX=b$ 有解.

9. $AB=0\implies r(A)+r(B)\leqslant n, r(B)=n\implies r(A)\leqslant 0\implies A=O$.

10. 必要性. 有条件可知 $V_1\cap V_2=\{0\}$，$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\in\mathbf{F}^{n\times n}$，而 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 只有零解，故 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ 可逆，从而 $r(A)=m, r(B)=n-m$，于是

$$\begin{aligned}\dim V_1&=n-r(A)=n-m,\\ \dim V_2&=n-r(B)=n-(n-m)=m.\end{aligned}$$

   又 V_1+V_2 是 $\mathbf{F}^n$ 的子空间, 且 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)=\dim\mathbf{F}^n$, 故 $\mathbf{F}^n=V_1\oplus V_2$.

   充分性. 若 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 有非零解 x_1，则 $x_1\in V_1\cap \mathrm{V}_2$. 这与 $\mathbf{F}^n=V_1\oplus V_2$ 矛盾.

11. (1) 由条件知，方程组系数矩阵的为 2，系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&a&b\\-1&0&c&d\\a&c&0&-e\\b&d&e&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&a&b\\-1&0&c&d\\0&0&0&ad-e-bc\\0&0&-(ad-e-bc)&0\end{pmatrix}$$

   故 $ad-e-bc=0$.

   (2) 易求得基础解系为 $(c,-a,1,0)^{\mathrm{T}},(d,-b,0,1)^{\mathrm{T}}$.

B 组

1. (1) 充分性: 有 $(A+E)(A-E)=A^2-E=0$, 由定理 $BC=0\implies r(B)+r(C)\leq n$, 得 $r(A+E)+r(A-E)\leq n$；而 $r(A+E)+r(A-E)\geq r(A+E+A-E)=n$, 故 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

(2) 必要性：由 $r(A+E)+r(A-E)=n$ 可得出 A 的特征值仅可能为 1 或者 -1，并且可以对角化.

因此，记 $A=PBP^{-1}$，其中 B 为对角矩阵，则 $(A+E)(A-E)=P(B-E)(B+E)P^{-1}=0$，故命题得证.

2. 设 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$，则有

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+c_2a_1^2+\cdots+c_{n-1}a_1^{n-1}=b_1, \\ c_0+c_1a_2+c_2a_2^2+\cdots+c_{n-1}a_2^{n-1}=b_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ c_0+c_1a_n+c_2a_n^2+\cdots+c_{n-1}a_n^{n-1}=b_n. \end{cases}$$

注意此处我们研究的对象是 $(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})^{\mathrm{T}}$. 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\neq 0.$$

所以由 Cramer 法则，上述关于 $(c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})^{\mathrm{T}}$ 的方程组有唯一解，所以满足条件的多项式函数 f 是唯一存在的.

3. 由 $r(A)=m$ 可知，A 的 m 个行向量（A^{T} 的 m 个列向量）线性无关，它们是方程组 $CX=0$ 的一个基础解系. 由 $CA^{\mathrm{T}}=O$ 和 $n-r(C)=m$，得 $r(C)=n-m$. 因此，由 $CA^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=C(BA^{\mathrm{T}})=O$，可知 $(BA)^{\mathrm{T}}$ 的 m 个行向量线性无关，它们也是 $CX=0$ 的一个基础解系.

4. 先记 $W=V_1+V_2$，若 $\alpha\in V_1\cap V_2$，则 $B\alpha=C\alpha=0$，所以

$$A\alpha=\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}\alpha=0,$$

由于 A 可逆，因此 $\alpha=0$，即 $V_1\cap V_2=\{0\}$，因此 V_1+V_2 是直和，因此只需证 $W=\mathbf{F}^n$ 即可. 事实上，我们知道 $r(B)=r, r(C)=n-r$，因此 $\dim V_1=n-r$，$\dim V_2=n-(n-r)=r$，所以

$$\dim W=\dim V_1+\dim V_2=n-r+r=n=\dim\mathbf{F}^n,$$

又 $W=V_1\oplus V_2\subseteq\mathbf{F}^n$，因此 $W=\mathbf{F}^n$，故得证.

5. 必要性：设 $AX=b$ 有无穷多解，则 $r(A)<n$，从而 $|A|=0$，于是 $A^*b=A^*AX=|A|X=0$.

充分性：设 $A^*b=0$，即方程组 $A^*b=0$ 有非零解，则 $r(A^*)<n$，又 $A_{11}\neq 0$，所以 $r(A)=n-1$.

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，因为 $A^*A=|A|E=O$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 为方程组 $A^*X=0$ 的解，又因为 $A_{11}\neq 0$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性无关.

由 $r(A^*)=1$，得方程组 $A^*X=0$ 的基础解系含有 $n-1$ 个线性无关的解向量，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n$ 为方程组 $A^*X=0$ 的一个基础解系.

因为 $A^*b=0$，所以 b 为方程组 $A^*X=0$ 的一个解，从而 b 可由 $\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n$ 线性表示，b 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ 线性表示，于是 $r(A)=r\begin{pmatrix}A & b\end{pmatrix}=n-1<n$，故方程组 $AX=b$ 有无穷多解.

6. 由各列的元素之和等于 0，得 $|A|=0$. 利用教材第 6 章习题 7 的结论：

   如果 $r(A)<n-1$，则 $r(A^*)=0$，$A^*=O$，所以，$A_{ij}=0$，$i,j=1,2,\dots,n$；

   如果 $r(A)=n-1$，则 $r(A^*)=1$，且 $AA^*=O$，于是 A^* 的每一列 $(A_{i1},A_{i2},\cdots A_{in})^{\mathrm{T}}$，$i=1,2,\dots,n$ 都是 $AX=0$ 的解.

   由于 $AX=0$ 的解空间的维数为

   $$n-r(A)=n-(n-1)=1$$

   所以，$AX=0$ 的任意两个解成比例. 又元素全部为 1 的 n 元向量 $e=(1,1,\dots,1)^{\mathrm{T}}$ 满足方程组 $AX=0$，因此 A^* 任意一列都与 e 成比例，即

   $$A_{i1}=A_{i2}=\cdots=A_{in}\qquad i=1,2,\dots,n$$

   所以，A^* 的每一列元素（即 $|A|$ 的每一行元素的代数余子式）都相等.

   同理，$(A^{\mathrm{T}})^*$ 的每一列元素（即 $|A^{\mathrm{T}}|$ 的每一行元素，也是 $|A|$ 的每一列元素的代数余子式）都相等，即

   $$A_{1j}=A_{2j}=\cdots=A_{nj}\qquad j=1,2,\dots,n$$

7. 见 2019-2020 学年线性代数 I（H）期末第五题.

8. 令原方程组 $AX=0$，解系组成矩阵 B. 则新方程组为 $B^{\mathrm{T}}X=0$. 而 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=(AB)^{\mathrm{T}}=0$，推测 A^{T} 的列向量为基础解系. 而由维数公式，

   $$r(A)=\dim V-\dim\ker(A)=2n-n=n.$$

   故 A^{T} 列空间维数为 n，即 $r_c(A^{\mathrm{T}})=n$. 而由题意 $r(B)=n$（否则不是基础解系），故

   $$\dim\ker(B)=\dim V'-r(B)=2n-n=n=r_c(A^{\mathrm{T}}).$$

   猜想成立.

9. (1) 略.

(2)

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2) &= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1\cap V_2)\\ &= n(n-r)+n(n-s)-n(n-k).\end{aligned}$$

11. (1) 容易计算 $|aE = bA| = (a+nb)a^{n-1}$.

(2) 由 $1 < r(aE+bA) < n$ 知 $|aE+bA| = 0$. 故 $a \neq 0$，且 $a+nb=0$，此时 $aE+bA$ 左上角的 $n-1$ 阶子式

$$\begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ b & a+b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a+b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)a^{n-2} = \frac{a^{n-1}}{n} \neq 0,$$

故 $\dim W = n - r(aE+bA) = n-(n-1) = 1$.

13. 见教材 P213 第 6 题.

14. 假. 取 $A = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & -1+i \end{pmatrix}$，有 $A^{\mathrm{T}}A = 0$.

15. 见教材 P214 第 8 题.

16. 由 $XA = 0$ 与 $XAA^{\mathrm{T}} = 0$ 同解. 又由条件知 $(C-B)AA^{\mathrm{T}} = 0$，故 $(C-B)A = 0$. 即 $CA = BA$.

17. 由 $r(A)+r(E-A) = n \iff A^2 = A$, 易证.

18. 方法一. 用分块矩阵的方法，我们知道

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & O \\ A & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}.$$

结合 $AB = BA$，我们知道

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} A+B & O \\ -A & E \end{pmatrix}}_{\text{非广义初等变换，难以想到}} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & A+B \end{pmatrix}.$$

于是

$$r(A)+r(B) = r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} \geqslant r\begin{pmatrix} AB & A \\ O & A+B \end{pmatrix} \geqslant r(AB)+r(A+B).$$

方法二. 设方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间分别是 V_1,V_2，方程组 $ABX=BAX=0$ 与 $(A+B)X=0$ 的解空间分别为 W_1,W_2，则 $V_1\subseteq W_1, V_2\subseteq W_1$，从而 $V_1+V_2\subseteq W_1$，同时 $V_1\cap V_2\subseteq W_1$，同时 $V_1\cap V_2\subseteq W_2$，利用维数公式就有

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)\leqslant \dim W_1+\dim W_2.$$

即

$$(n-r(A))+(n-r(B))\leqslant(n-r(AB))+(n-r(A+B)).$$

化简便知 $r(A)+r(B)\geqslant r(AB)+r(A+B)$.

19. (1) 必要性：$ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解可知它们基础解系所含向量个数相同，即

$$n-r(AB)=n-r(B)\implies r(AB)=r(B).$$

充分性：由必要性，当 $r(AB)=r(B)$ 时，$ABX=0$ 与 $BX=0$ 的基础解系所含向量个数相同，而 $BX=0$ 的解都是 $ABX=0$ 的解，所以 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

(2) $r(AB)=r(B)$ 说明 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解，用 CX 代替 X 就得到 $ABCX=0$ 与 $BCX=0$ 同解，从而有 $r(ABC)=r(BC)$.

推论. 设 A 是一个方阵，且存在正整数 k 使得 $r(A^{k+1})=r(A^k)$，递推就有

$$r(A^k)=r(A^{k+1})=r(A^{k+2})=\cdots.$$

(3) 当 A 可逆时，结论是显然的. 当 A 不可逆时，有 $r(A)\leqslant n-1$，现在考虑 $n+1$ 个矩阵 $A,A^2,\dots,A^{n+1}$，有

$$n-1\geqslant r(A)\geqslant r(A^2)\geqslant\cdots\geqslant r(A^n)\geqslant r(A^{n+1})\geqslant 0.$$

这 $n+1$ 个矩阵的秩只能从 $0,1,\dots,n-1$ 这 n 个数中取，所以必有两个矩阵的秩相同，即存在 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 使得 $r(A^m)=r(A^{m+1})$，由上面的推论可得：

$$r(A^m)=r(A^{m+1})=\cdots=r(A^n)=r(A^{n+1})=\cdots.$$

特别的，对于任意的正整数 k 有 $r(A^n)=r(A^{n+k})$.

20. 增广矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&b&-1&1\\2&3&1&1&-2\\0&1&a&3&-4\\-3&-3&-3b&b&a+2\end{pmatrix}$. 由解空间维数为 3 可知，$r(A)=2$. 由于 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\3\\1\\-3\end{pmatrix}$ 线性无关，则后三列必能被其表示. 对于 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\b\end{pmatrix}=$

$k_1\beta_1+k_2\beta_2 \implies k_1=-4,k_2=3 \implies b=3$

$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\-4\\a+2\end{pmatrix}=k_1\beta_1+k_2\beta_2 \implies k_1=5,k_2=1 \implies a=-25.$

而 $\alpha_1=\begin{pmatrix}b\\1\\a\\-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-5\\-9\end{pmatrix}=k_1\beta_1+k_2\beta_2 \implies k_1=8,k_2=-5$ 成立. 故 $a=-5,b=3$.

解空间的基略.

若解空间为 2 维, 则 $r(A)=3$, 令 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}$, 由于 α_1,α_2 必线性无关, 故 α_3,α_4 中有且仅有一个可被 α_1,α_2 表示. 若为 α_3, $\alpha_2-2\alpha_1=(0,1,1-2b,3,-4)=(0,1,4,3,-4)$, 则 $a=1-2b$. 故 $a+2b=1$，且 α_4 不能被表示，故 $\alpha_4\neq-3\alpha_1 \implies b\neq3,a\neq-5$. 故 $\begin{cases}a+2b=1\\b\neq3,a\neq-5\end{cases}$ 即可.

21. $W_1\cap W_2:\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0.\qquad W_1+W_2:\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}.$

22. 方法一. 令 $x_4=t$，则方程组 $\begin{cases}x_1+x_4=-1\\x_2-2x_4=d\\x_3+x_4=e\end{cases}$ 的一般解为 $\begin{cases}x_1=-1-t\\x_2=d+2t\\x_3=e-t\\x_4=t\end{cases}$.

代入方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+ax_3+x_4=1\\-x_1+x_2-x_3+bx_4=2\\2x_1+x_2+x_3+x_4=c\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}(2-a)t=2-d-ae\\(b+4)t=1-d+e\\0=c-d-e+2\end{cases}$. 由 t 的任意性，可得 $a=2,b=-4$. 从而 $\begin{cases}0=2-d-2e\\0=1-d+e\\0=c-d-e+2\end{cases}$，解得 $d=\dfrac{4}{3},e=\dfrac{1}{3},c=-\dfrac{1}{3}$.

方法二. 由于

$$\begin{pmatrix} A & b \\ B & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & b & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 & e \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a+6 & 3-2d+(1-a)e \\ 0 & 0 & 0 & 2a-4 & c-2+d(2a-1)e \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & d-2+ae \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

易知 $r(B)=3$, 由 $r\begin{pmatrix} A & b \\ B & d \end{pmatrix} = r(B)$ 可得 $\begin{cases} a-2=0 \\ 2a-4=0 \\ b-a+6=0 \\ 3-2d+(1-a)e=0 \\ c-2+d(2a-1)e=0 \\ d-2+ae=0 \end{cases}$,解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=-\dfrac{1}{3} \\ d=\dfrac{4}{3} \\ e=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

23. 注意如果 X 是两个方程组的公共解，这等价于存在 t_1, t_2, k_1, k_2 使得

$$X = \gamma + t_1\eta_1 + t_2\eta_2 = \delta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2.$$

从而对应有

$$t_1\eta_1 + t_2\eta_2 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2 = \gamma - \delta.$$

将 t_1, t_2, k_1, k_2 设为未知量，对上述方程组的增广矩阵进行初等行变换，可得

$$(\eta_1, \eta_2, -\xi_1, -\xi_2, \delta-\gamma) = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -8 & -10 & -16 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2. \end{pmatrix}$$

故 $(t_1, t_2, k_1, k_2)'$ 有唯一解 $(-1, 2, -1, 2)'$. 因此公共解为

$$X = \gamma - \eta_1 + 2\eta_2 = \delta - \xi_1 + 2\xi_2 = (1, 0, -1, 2)'.$$

24. 方程组 (1)、(2) 有公共解，即方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1 \end{cases}$ 有解，对其增广矩阵

进行初等行变换，

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{pmatrix}\to$$
$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&a^2-3a+2&0\\0&0&1-a&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}.$$

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$ 时，方程组 (1)、(2) 没有公共解.

当 $a=1$ 时，$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，因为 $r(A)=r(\bar{A})=2$，所以方程组 (1)、(2) 有公共解，公共解为 $X=C\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$（其中 C 为任意常数）.

当 $a=2$ 时，$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，方程组 (1)、(2) 有唯一的公共解为 $X=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

C 组

1. 令 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 为一个 n 次多项式，设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}$ 为 $f(x)$ 的 $n+1$ 个不同的根，则有齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda_1^na_n+\cdots+\lambda_1a_1+a_0=0,\\ \lambda_2^na_n+\cdots+\lambda_2a_1+a_0=0,\\ \qquad\vdots\\ \lambda_{n+1}^na_n+\cdots+\lambda_{n+1}a_1+a_0=0.\end{cases}$. 其系数矩阵

为 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & \lambda_1^{n-1} & \cdots & 1\\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n-1} & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{n+1}^n & \lambda_{n+1}^{n-1} & \cdots & 1\end{pmatrix}$. 显然 $|A|\neq 0$，从而 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$，这与 $f(x)$ 是 n 次多项式矛盾.

2. 见教材 P214 第 7 题.

3. (1) 由于 $r(A)=n$，所以 A 可逆，由打洞原理可知 $|B|=|A|(0-\beta'A^{-1}\beta)=-|A|\beta'A^{-1}\beta$，从而 B 可逆的充要条件为 $\beta'A^{-1}\beta\neq 0$.

   (2) 必要性. 由于

$$r=r(A)\leqslant r(A,\beta)\leqslant r\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta' & 0\end{pmatrix}=r(B)=r$$

   再结合 $A'=A$，可知

$$r\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta' & 0\end{pmatrix}=r(A,\beta)=r\begin{pmatrix}A\\ \beta'\end{pmatrix}$$

   于是由定理 15.1 可知方程组 $\begin{pmatrix}A\\ \beta'\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\beta\\ 0\end{pmatrix}$ 有解，即 $\begin{cases}AX=\beta,\\ \beta'X=0.\end{cases}$ 有解.

   充分性. 由于 $\begin{cases}AX=\beta\\ \beta'X=0\end{cases}$ 有解，从而 $AX=\beta$ 也有解，即有 $r(A)=r(A,\beta)$. 另外 $\begin{cases}AX=\beta\\ \beta'X=0\end{cases}$ 有解也说明 $\begin{pmatrix}A\\ \beta'\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}\beta\\ 0\end{pmatrix}$ 有解，于是结合定理 15.1 可知 $r\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta' & 0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A\\ \beta'\end{pmatrix}$. 而显然 $r\begin{pmatrix}A\\ \beta'\end{pmatrix}=r(A,\beta)=r(A)$，于是 $r(B)=r\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta' & 0\end{pmatrix}=r$.

   (3) 必要性. 若 B 可逆，则 B 的行向量组线性无关，从而 $r(A,\beta)=n$，又由于 $r(A)=n-1$，所以 $r(A,\beta)=r(A)+1$，从而由定理 15.1 知 $AX=\beta$ 无解.

   充分性. 由于 $r(A)=n-1$，若 $AX=\beta$ 无解，则由定理 15.1 可知 $r(A,\beta)=r(A)+1=n$，于是

$$r(B)=r\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta' & 0\end{pmatrix}\geqslant r(A,\beta)=n$$

若 $r(B)=n$，则 $r(B)=r\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta' & 0\end{pmatrix}=r(A,\beta)$，取转置结合 $A'=A$ 有 $r\begin{pmatrix}A & \beta\\ \beta' & 0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A\\ \beta'\end{pmatrix}$，再次结合定理 15.1 可知方程组 $\begin{cases}AX=\beta,\\ \beta'X=0.\end{cases}$ 有解，特别地，$AX=\beta$ 也有解，这就与已知产生了矛盾. 所以 $r(B)=n+1$，即 B 可逆.

4. (1) 当 n 为偶数时，将增广矩阵 $\bar{A}$ 的第 i $(i=1,2,\ldots,n-1)$ 行乘以 $(-1)^i$ 加到最后一行，得

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_2\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & b_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^ib_i\end{pmatrix}.$$

故当 $\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^ib_i=0$ 时，方程组有无穷多解，一般解为

$$\begin{cases}x_1=\sum\limits_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}b_i+(-1)^1x_n,\\ x_2=\sum\limits_{i=2}^{n-1}(-1)^{i-2}b_i+(-1)^2x_n,\\ \qquad\vdots\\ x_{n-2}=b_{n-2}-b_{n-1}+(-1)^{n-2}x_n,\\ x_{n-1}=b_{n-1}+(-1)^{n-1}x_n,\end{cases}$$

其中 x_n 为自由未知量.

(2) 当 n 为奇数时，有

$$\bar{A}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_2\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & b_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & b_n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(-1)^ib_i\end{pmatrix}.$$

此时无论 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ $(n\geqslant 2)$ 取何值，方程组都有唯一解为

$$\begin{cases} x_1=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}b_i+(-1)^{n-1}x_n,\\ x_2=\displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^{i-2}b_i+(-1)^{n-2}x_n,\\ \quad\vdots\\ x_{n-2}=b_{n-2}-b_{n-1}+(-1)^2x_n,\\ x_{n-1}=b_{n-1}+(-1)^1x_n,\\ x_n=\dfrac{1}{2}b_n+\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^ib_i. \end{cases}$$

5. (1) 必要性. 设 A 的行向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$, B 的行向量为 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$, 由 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解得 $AX=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=0$ 同解，从而系数矩阵的秩相同，即行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ 秩相同.
充分性可由必要性的证明得到. 但是由于 A,B 列向量的维数都可能不同，所以不存在等价关系.

(2) 提示. $V_1\subseteq V_2$ 等价于 $AX=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=0$ 同解.

(3) 必要性. 由题意可知 $AX=a$ 与 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 同解，从而它们的增广矩阵秩相同，即 $r(A,a)=r\begin{pmatrix}A&a\\B&b\end{pmatrix}$，可知 (A,a) 与 $\begin{pmatrix}A&a\\B&b\end{pmatrix}$ 的行向量组等价，从而 (B,b) 的每一个行向量都可以由 (A,a) 的行向量线性表出.
充分性可由必要性得到.

(4) 证明留给读者.

6. (1) 采用反证法. 设 $|A|=0$，则线性方程组 $AX=0$ 有非零解，设为 $X_0=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$，记

$$|x_k|=\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}.$$

由 $X_0\neq 0$ 可知 $|x_k|>0$，考虑 $AX=0$ 的第 k 个方程，有 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j=0$，于是

$$|a_{kk}||x_k|=|-\sum_{j\neq k}a_{kj}x_j|\leqslant\sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_k|.$$

约去 $|x_k|$ 后可得 $|a_{kk}|\leqslant\displaystyle\sum_{j\neq k}|a_{kj}|$，这与条件矛盾. 所以 $|A|\neq 0$.

(2) 构造实函数

$$f(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & ta_{12} & ta_{13} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & ta_{23} & \cdots & ta_{2n} \\ ta_{31} & ta_{32} & a_{33} & \cdots & ta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} & ta_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由于 A 是实矩阵，所以 $f(t)$ 是关于 t 的一个实系数多项式（连续）函数，同时

$$f(0)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}>0.$$

当 $t\in[0,1]$ 时，还有

$$a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\geqslant\sum_{j\neq i}|ta_{ij}|.$$

由 (1) 可知 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上非零，由连续函数的介值定理可知 $f(1)>0$，即 $|A|>0$.

(3) 此为直接推论不再赘述.

第 12 讲　史海拾遗

第 13 讲　多项式

A 组

1. 按照环的定义逐一进行验证即可.

2. (1) 由于 $p(x), q(x) \neq 0$，故存在 $c \in \mathbf{F}$，使得 $p(c) \neq 0, q(c) \neq 0$，从而 $p(c)q(c) \neq 0$，这表明 $p(x)q(x) \neq 0$.

   (2) 由 $p(x)q(x) = p(x)r(x)$ 知 $p(x)(q(x) - r(x)) = 0$. 而 $p(x) \neq 0$，因此有 $q(x) - r(x) = 0$ 即 $q(x) = r(x)$.

3. 设 $p(x)$ 的不可约分解为 $p(x) = cq_1(x)^{\alpha_1}q_2(x)^{\alpha_2}\cdots q_m(x)^{\alpha_m}$，其中 α_i 为正整数，$i = 1, 2, \ldots, m$.

   则 $p'(x) = c\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha_i q_i(x)^{\alpha_i - 1}\prod\limits_{j\neq i} q_j(x)^{\alpha_j})$，从而 $d(x) = c\prod\limits_{i=1}^{m} q_i(x)^{\alpha_i - 1}$，

   $\dfrac{p(x)}{d(x)} = c\prod\limits_{i=1}^{m} q_i(x)$ 显然没有重因式，且这个多项式的不可约因式与 $p(x)$ 的不可约因式仍然相同.

4. 设 $\deg f = n$ 为奇数，$f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_n x^n$. 不妨设 $a_n > 0$（否则考虑 $-f(x)$）.

   取 $x = \dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}|a_i|}{a_n} + 2$，则 $a_n x^n > \sum\limits_{i=0}^{n-1}|a_i|x^n > \sum\limits_{i=0}^{n-1}|a_i|x^i \geqslant |\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i x^i|$，

   从而 $f(x) = a_n x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i x^i > 0, f(-x) = -a_n x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i(-x)^i \leqslant -a_n x_n + \sum\limits_{i=0}^{n-1}|a_i x^i| < 0$. 而实系数多项式在 R 上连续，故 f 一定有实的零点.

B 组

1. $1 = \dfrac{1}{2}(x-2)(x-3) - \dfrac{1}{2}(x-4)(x-1)$，故 $\dfrac{1}{2}(x-2)(x-3) \equiv 1 \bmod (x-1)$.

   同理有 $-(x-1)(x-3) \equiv 1 \bmod (x-2)$，$\dfrac{1}{2}(x-1)(x-2) \equiv 1 \bmod (x-3)$.

   从而 $f(x) \equiv \dfrac{1}{2}\times 4\times(x-2)(x-3) - 1\times 8\times(x-1)(x-3) + \dfrac{1}{2}\times 16\times(x-1)(x-2) \equiv 2x^2 - 2x + 4 \bmod (x-1)(x-2)(x-3)$.

2. 设 $q = ps + t$，其中 $\deg t < \deg p$，则 $q^2 = p^2s^2 + 2pst + t^2$.

   从而 $p^2 \mid q^2 \iff 2pst + t^2 = 0 \iff t(2ps + t) = 0$. 由于 $\deg t < \deg p \leqslant \deg(ps)$，故 $t(2ps + t) = 0 \iff t = 0 \iff p \mid q$.

3. (1) 充分性：假设多项式 p, q 有公共复根 λ，则 $(x-\lambda)$ 为 p 和 q 的公因式，这与 p 和 q 互素矛盾.

   (2) 必要性：设 $d(x)$ 是 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的公因式，则 $\deg d > 1$，由代数基本定理知 $d(x)$ 在复数域上有根，这表明 p 和 q 有公共复根，矛盾. 从而 p 和 q 互素.

4. 必要性显然. 下面归纳证明充分性.

   (1) $k=1$ 时，命题成立.

   (2) 假设命题对 k 成立，则对于 $k+1$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g(c)=g'(c)=\cdots=g^{(k-1)}(c)=0, g^{(k)}(c)\neq 0$，根据归纳假设，$c$ 是 $g(x)$ 的 k 重根，从而 c 是 $f(x)$ 的 $(k+1)$ 重根，命题对 $k+1$ 成立.

5. 考虑多项式 $f(x)=p(x)-q(x)$，$\deg f \leqslant \max\{\deg p, \deg q\}=n$，而 m $(m \geqslant 0)$ 次多项式至多有 m 个根，这表明 $\deg f=-\infty$，只能有 $f(x)\equiv 0$，从而 $p(x)=q(x)$.

C 组

1. (1) 存在性：给定 $p(x), s(x) \in \mathbf{F}[x], s(x) \neq 0$，设 $A=\{r(x) \in \mathbf{F}[x] \mid \exists s(x) \in \mathbf{F}[x], p(x)=s(x)q(x)+r(x)\}$.

   由于 $p(x)=0\cdot s(x)+p(x)$，故 $p(x)\in A$，$A\neq\emptyset$. 若 $s \mid p$，则 $r(x)=0\in A$，且满足 $\deg r<\deg s$.

   否则存在 $\min\limits_{r\in A}\{\deg r\}$，我们证明 $\deg r<\deg s$.

   若不然，假设 $r_1(x)$ 为 A 中次数最低的多项式，$\deg r_1=m\geqslant \deg s$，设 $r_1=a_m x^m+\cdots+a_0$，则 $r_2(x)=r_1(x)-s(x)\cdot a_m x^{m-\deg s}\in A$，且 $\deg r_2<m$，这与 r_1 的选取矛盾，从而假设不成立，有 $\deg r_1(x)<\deg s$，存在性得证.

   (2) 唯一性：设 $p(x)=s(x)q_1(x)+r_1(x)=s(x)q_2(x)+r_2(x)$，则 $s(x)(q_1(x)-q_2(x))=r_2(x)-r_1(x)$.

   若 $q_1(x)\neq q_2(x)$，则 $\deg(r_2-r_1)<\deg s\leqslant \deg s(x)(q_1(x)-q_2(x))$，矛盾. 从而 $q_1(x)=q_2(x), r_1(x)=r_2(x)$.

2. (1) 必要性：设 $\deg p=n, \deg q=m$，考虑映射 $T:\mathbf{F}[x]_n\times\mathbf{F}[x]_m\to\mathbf{F}[x]_{m+n}$. 我们先证明 T 是单射.

   假设 $r_1, r_2\in\mathbf{F}[x]_n, s_1, s_2\in\mathbf{F}[x]_m$，$T(r_1,s_1)=T(r_2,s_2)$. 则 $r_1p+s_1q=r_2p+s_2q \implies (r_1-r_2)p=(s_2-s_1)q \implies p \mid (s_2-s_1)q$. 由于 $(p,q)=1$，故有 $p|(s_2-s_1)$. 而 $\deg(s_2-s_1)\leqslant n-1<\deg p$，故有 $s_2-s_1=0, s_1=s_2$，进而有 $r_1=r_2$，从而 T 为单射.

   又由于 $\dim(\mathbf{F}[x]_n\times\mathbf{F}[x]_m)=n+m=\dim(\mathbf{F}[x]_{m+n})$，故由 T 为单射知 T 为满射. 从而存在 $u(x), v(x)\in\mathbf{F}[x]$，使得 $u(x)p(x)+v(x)q(x)=1$.

(2) 充分性：设 $(p(x), q(x)) = d(x)$，则 $d(x) \mid (u(x)p(x) + v(x)q(x)) = 1$，从而 $d(x) = 1$，$p(x)$ 和 $q(x)$ 互素.

第 14 讲　相似标准形：动机与基础

A 组

1. 对于 $\forall v \in \ker S, Sv = 0 \implies STv = TSv = 0$，这表明 $Tv \in \ker S$，$\ker S$ 在 T 下不变. 对于 $\forall v \in \operatorname{im} S, v = Su \implies Tv = TSu = S(Tu)$，这表明 $Tv \in \operatorname{im} S$，$\operatorname{im} S$ 在 T 下不变.

2. (1) 对于 $\forall v \in W_1$，有 $v = ke_1, Tv = T(ke_1) = kT(e_1) = 2ke_1 \in W_1$，从而 W_1 为 T 的不变子空间.

   (2) 容易看出 T 在自然基下的矩阵不可对角化，从而 $\mathbf{R}^2$ 不能表示为 T 的任何不变子空间 W_2 与 W_1 的直和.

3. (1) 对于 $\forall u = (x, 0) \in U$，$Tu = T(x, 0) = (0, 0) \in U$，因此 U 在 T 下不变，且 $T|_U$ 是 U 上的零线性变换.

   (2) T 在自然基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，它不可对角化.

   (3) 对于 $\forall v + U = (x, y) + U \in \mathbf{F}^2/U$，$(T/U)(v + U) = Tv + U = (y, 0) + U = 0 + U$，从而 T/U 是 $\mathbf{F}^2/U$ 上的 0 线性变换.

4. 考虑 $U = E(\lambda_1, T) \oplus E(\lambda_2, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T)$，对于 $\forall u \in U$，设 $u = v_1 + v_2 + \cdots + v_m$，其中 $v_i \in E(\lambda_i, T)$. 则 $v_i = T(\dfrac{v_i}{\lambda_i})$，从而 $u = T(\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{v_i}{\lambda_i}) \in \operatorname{im} T$. 因此 U 是 $\operatorname{im} T$ 的子空间. 进而有 $\dim U = \dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim \operatorname{im} T$.

5. 设 T 的非零特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$，则 $m \leqslant \dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim \operatorname{im} T = k$. 若 0 是 T 的非零特征值，则 T 至多有 $k + 1$ 个特征值. 否则 T 至多有 k 个特征值. 综上可知 T 至多有 $k + 1$ 个特征值.

6. 令 $|\lambda E - A| = 0$，解得 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$. 然后解 $(5E - A)X = 0$，解得 $X = k(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. 解 $(-E - A)X = 0$，解得 $X = k_1(1, -1, 0)^{\mathrm{T}} + k_2(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$. 因此 $\lambda_1 = 5$ 对应的特征子空间为 $\operatorname{span}(1 + x + x^2)$，$\lambda_2 = -1$ 对应的特征子空间为 $\operatorname{span}(1 - x, 1 - x^2)$.

7. 矩阵的行列式等于其特征值之积，知 $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2$. 进一步地，$A - 5E$ 的特征值为 $-4, -6, -3$，$A + 5E$ 和 $5E + P^{-1}AP$ 的特征值均为 $6, 4, 7$. 从而 $|A - 5E| = -72, |A + 5E| = |5E + P^{-1}AP| = 168$. $|B| = |A^2(A - 5E)| = |A||A||A - 5E| = -288$.

8. 设 $A^*\alpha = \lambda\alpha$，则 $AA^*\alpha = \lambda A\alpha$. 从而 $\lambda A\alpha = |A|\alpha = -\alpha \implies A\alpha = -\dfrac{1}{\lambda}\alpha$，故 α 为 A 的特征向量.

由 $A\alpha=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+1+c\\-2-b\\c-1-a\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{\lambda}\alpha$ 可知：$(-a+1+c)+(c-1-a)=0$，从而 $a=c$，代入可知 $b=-3,-\dfrac{1}{\lambda}=-1,\lambda=1$. 此外有 $A=\begin{pmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{pmatrix}$，由 $|A|=-1$ 解得 $a=2$，因此 $c=a=2$.

9. 由于 $AX=\lambda_0X$，故 $A(BX)=(AB)X=(BA)X=B(AX)=B(\lambda_0X)=\lambda_0(BX)$，从而 $BX\in V_{\lambda_0}$.

B 组

1. (1) 对于 $v_1+\ker\sigma=v_2+\ker\sigma$，有 $v_1=v_2+u$，其中 $u\in\ker\sigma$. 因此 $\widetilde{\sigma}(v_1+\ker\sigma)=\sigma(v_1)=\sigma(v_1+u)=\sigma(v_2)=\widetilde{\sigma}(v_2+\ker\sigma)$，从而 $\widetilde{\sigma}$ 是良定义的.

   对于 $\forall v_1+\ker\sigma,v_2+\ker\sigma\in V/\ker\sigma$ 和 $l,h\in\mathbf{F}$，都有 $\widetilde{\sigma}(l(v_1+\ker\sigma)+h(v_2+\ker\sigma))=\widetilde{\sigma}(lv_1+hv_2+\ker\sigma)=\sigma(lv_1+hv_2)=l\sigma(v_1)+h\sigma(v_2)=l\widetilde{\sigma}(v_1+\ker\sigma)+h\widetilde{\sigma}(v_2+\ker\sigma)$，这表明 $\widetilde{\sigma}$ 是 $V/(\ker\sigma)$ 到 W 上的线性映射.

   (2) 对于 $v_1+\ker\sigma,v_2+\ker\sigma$，若有 $\sigma(v_1)=\sigma(v_2)$，则 $v_1-v_2\in\ker\sigma$，从而 $v_1+\ker\sigma=v_2+\ker\sigma$. 因此 $\widetilde{\sigma}$ 为单射.

   (3) 对于 $\forall u\in\operatorname{im}\widetilde{\sigma}$，有 $u\in\operatorname{im}\sigma$，故 $\operatorname{im}\widetilde{\sigma}\subseteq\operatorname{im}\sigma$.

   对于 $\forall v=\operatorname{im}(w)\in\operatorname{im}\sigma$，$v=\sigma(w)=\widetilde{\sigma}(w+\ker\sigma)\in\operatorname{im}\widetilde{\sigma}$，从而 $\operatorname{im}\sigma\subseteq\operatorname{im}\widetilde{\sigma}$. 综上有 $\operatorname{im}\widetilde{\sigma}=\operatorname{im}\sigma$.

   (4) 由 (2)(3) 可知 $\widetilde{\sigma}$ 实际上给出了一个从 $V/(\ker\sigma)$ 到 $\operatorname{im}\sigma$ 的一一映射，从而 $V/(\ker\sigma)\cong\operatorname{im}\sigma$.

2. 必要性是显然的. 下证充分性. 设 $v_1,v_2,\ldots,v_n$ 为 V 的一组基，则对于每个 $1\leqslant i\leqslant n$，存在 $c_i\in\mathbf{F}$，使得 $T(v_i)=c_iv_i$. 对于 $\forall i\neq j$，$T(v_i+v_j)=c_iv_i+c_jv_j\in\operatorname{span}(v_i+v_j)$，这表明 $c_i=c_j$. 从而所有的 c_i 均相等，T 为数乘变换.

3. (1) 对于 $\forall v+\operatorname{im}\sigma$，$(\sigma/(\operatorname{im}\sigma))(v+\operatorname{im}\sigma)=\sigma(v)+\operatorname{im}\sigma=0+\operatorname{im}\sigma$，因此 $\sigma/(\operatorname{im}\sigma)=0$.

   (2) $\sigma/(\ker\sigma)$ 为单射 $\iff\ker(\sigma/(\ker\sigma))=0+\ker\sigma\iff\ker\sigma\cap\operatorname{im}\sigma=\{0\}$.

4. 对于 T/U 的特征值 λ，设 $(T/U)(v+U)=\lambda(v+U)=\lambda v+U$. 则 $(T/U)(v+U)=Tv+U=\lambda v+U$.

5. (1) T 的所有一维不变子空间为 $\operatorname{span}(e_i)$，$i=1,2,\ldots,n$.

(2) T 的所有不变子空间为所有 $\mathrm{span}(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$，其中 $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. T 的不变子空间个数为 2^n.

6. 令 $|\lambda I - T| = 0$，若 $a < 1$，则 $\lambda_1 = \sqrt{1-a}, \lambda_2 = -\sqrt{1-a}$，相应的特征向量为 $(\alpha_1 + \sqrt{1-a}\alpha_2), (\alpha_1 - \sqrt{1-a}\alpha_2)$. 从而 T 的所有不变子空间为 $\{0\}, \mathrm{span}(\alpha_1 + \sqrt{1-a}\alpha_2), \mathrm{span}(\alpha_1 - \sqrt{1-a}\alpha_2), V$.

   若 $a = 1$，则 $\lambda = 0$，相应的特征向量为 α_1，从而 T 的所有不变子空间为 $\{0\}, \mathrm{span}(\alpha_1), V$.

   若 $a > 1$，则 T 在 $\mathbf{R}$ 上无特征值，T 的不变子空间只有 $\{0\}$ 和 V.

7. 由于 $r(A) + r(B) < n$，故 A 和 B 都有特征值 0.

   由于 $\dim(N(A) \cap N(B)) = \dim(N(A)) + \dim(N(B)) - \dim(N(A) + N(B)) \geqslant \dim(N(A)) + \dim(N(B)) - n = n - r(A) + n - r(B) - n = n - (r(A) + r(B)) \geq 0$，这表明 $N(A) \cap N(B) \neq \{0\}$，从而存在 A 和 B 有相同的特征向量（对应于特征值 0）.

8. 对于 $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$，存在 $u_i \in V, u_i \neq 0$，使得 $Au_i = \lambda_i u_i$，从而 $A^2 u_i = A(\lambda_i u_i) = \lambda_i A(u_i) = \lambda_i^2 u_i$，这表明 λ_i^2 为 A^2 的特征值，从而 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$ 为 A^2 的 n 个特征值. 进而知 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = tr(A^2) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{kj}$.

9. 设 $a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = 0$. 在等式两边同时左乘 $(A - kE)$ 可知：$a_2lX_1 + a_3lX_2 = 0$. 再左乘 $(A - kE)$ 知 $a_3l^2 = 0$. 结合 $l \neq 0$，有 $a_3 = 0$. 回代知 $a_1 = a_2 = 0$，从而 X_1, X_2, X_3 线性无关.

10. (1) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是一个严格对角占优矩阵，则 A 的每个特征值都在某个 Gershgorin 圆盘 $D_i = \{z \in \mathbf{F} \mid |z - a_{ii}| \leqslant \displaystyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\}$ 内. 若 0 是 A 的特征值，则存在 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，使得 $|a_{ii}| < \displaystyle\sum_{j\neq i} |a_{ij}|$，这与 A 是严格对角占优矩阵矛盾. 从而 0 不是 A 的特征值，A 为可逆矩阵.

    (2) 假设 A 不可逆，则 A 有特征值 0. 显然 $0 \notin D_1, D_2$，故 $0 \in D_3$. 注意到 0 实际上在 D_3 的边界上，回顾 Gershgorin 圆盘第一定理的证明，要使得等号成立则应有 $c_1 = c_2 = c_3$，从而 $(v_1 + v_2 + v_3)$ 是 A 对应于特征值 0 的特征向量. 而 $(v_1 + v_2 + v_3)A \neq 0$，矛盾. 故假设不成立，$A$ 为可逆矩阵.

C 组

1. $f(\lambda) = |\lambda E - B| = (\lambda - \lambda_1)^{\dim E(\lambda_1, B)} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{\dim E(\lambda_m, B)}$，故 $f(A)$ 可逆 $\iff (A - \lambda_1 E)^{\dim E(\lambda_1, B)} \cdots (A - \lambda_m E)^{\dim E(\lambda_m, B)}$ 可逆 $\iff |\ (A - \lambda_1 E)^{\dim E(\lambda_1, B)} \cdots (A - \lambda_m E)^{\dim E(\lambda_m, B)}\ | \neq 0 \iff |\ (A - \lambda_1 E)\ |^{\dim E(\lambda_1, B)} \cdots |\ (A - \lambda_m E)\ |^{\dim E(\lambda_m, B)} \neq 0 \iff \forall i = 1, 2, \ldots, m, |A - \lambda_m E| \neq 0 \iff B$ 的任一特征值都不是 A 的特征值.

2. 命题等价于 $\sigma, \tau \in \mathcal{L}(V), \sigma\tau = \tau\sigma$，则 σ 和 τ 至少有一个公共的特征向量.

   考虑 σ 的不变子空间 $E(\lambda, \sigma)$，对于 $v \in E(\lambda, \sigma)$，有 $\sigma v = \lambda v \implies \sigma(\tau v) = \tau\sigma v = \lambda(\tau v)$，这表明 $E(\lambda, \sigma)$ 是 τ 的不变子空间. 考虑限制映射 $\tau|_E(\lambda, \sigma)$，它一定有特征值和相应的特征向量 $u \in E(\lambda, \sigma), u \neq 0$，从而 u 为 σ 和 τ 的公共特征向量.

第 15 讲　相似标准形：复数域上的尝试与理论

A 组

1. 非常简单，可以举 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 的例子，也可以举一个可对角化另一个不可对角化的例子，因为上述情况矩阵对应的相似标准形不一样，故不相似.

2. 解 $|\lambda E-A|=0$ 可得特征值为 $1,1,-2$. 然后解 $(E-A)X=0$ 得 $X=t_1(-1,1,0)^{\mathrm T}+t_2(1,0,1)^{\mathrm T}$；解 $(-2E-A)X=0$，得 $X=t(-1,-1,1)^{\mathrm T}$. 可见特征值 1 对应的特征子空间为 $\mathrm{span}((-1,1,0)^{\mathrm T},(1,0,1)^{\mathrm T})$，特征值 -2 对应的特征子空间为 $\mathrm{span}((-1,-1,1)^{\mathrm T})$. 可知与 A 相似的对角矩阵为 $\mathrm{diag}(1,1,-2)$.

3. (1) $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -b\\ -c & \lambda-d\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=\lambda^2-(a+d)\lambda+|A|$. 由于 $|A|<0$，因此判别式 $\Delta=(a+d)^2-4|A|>0$，因此二阶矩阵 A 有两个互异特征值，故可对角化，因此与对角矩阵相似；

   (2) 同 (1)，判别式 $\Delta=(a+d)^2-4|A|>0$，因此二阶矩阵 A 有两个不同的特征值，故可对角化.

4. (1) 由 Cramer 法则，A 为方阵且 $AX=\beta$ 有解但不唯一，即 $|A|\neq 0$，解得 $a=-2$ 或 $a=1$，分别代入可知 $a=1$ 时增广矩阵的秩为 2，而 $r(A)=1$，故无解；$a=-2$ 时增广矩阵的秩为 2，而 $r(A)=2$，故有解，故 $a=-2$.

   (2) 容易求得特征值为 $0,-3,3$，求特征向量可知 $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

5. 由分块矩阵乘法，$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $AP=P\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}=PB$，即 $P^{-1}AP=B$，故 A 与 B 相似，故两矩阵的特征值相同，简单求解 B 的特征值即得 A 的特征值为 $1,-1,3$.

6. 每行元素之和为 3，则我们知道 $\alpha=(1,1,1)^{\mathrm T}$ 是 3 对应的特征向量（具体理由只需要验证 $A\alpha=3\alpha$ 即可，这是很常用的性质），而 $AX=0$ 的解是对应特征值 0 的特征向量，故由题意可知取 $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

B 组

1. 回忆例题中 $A^2=2A$，即 $A(A-2E)=O$ 的证明，我们知道 A 的特征值只能为 a 或 b，然后我们可以证明 $r(aE-A)+r(bE-A)\leqslant n$ 和 $r(aE-A)+r(bE-A)\geqslant n$，因此 $r(aE-A)+r(bE-A)=n$，即 A 可对角化（由于和例题完全类似，这里不再展开具体做法）.

2. 若 $A^2=E$，则 A 可对角化. 设 $A=P^{-1}BP$，B 为对角矩阵，若 A 的特征值只有 1，则 $B=E$，从而 $A=P^{-1}EP=E$. 若 A 的特征值只有 -1，则 $B=-E$，从而 $A=-E$.

3. 根据例题中关于 $A^2=A$ 的讨论可知，满足 $A^2=A$ 的矩阵 A 可对角化（设过渡矩阵为 P），特征值 0 和 1 的重数分别为 $n-r$ 和 r，因此 $|A-2E|=|P^{-1}||A-2E||P|=|\operatorname{diag}(-1,\ldots,-1,-2,\ldots,-2)|=(-1)^r(-2)^{n-r}$.

4. 三阶矩阵如果有三个特征值则一定可对角化，故由题意 T 只能有 6 和 7 两个特征值. 故 $\lambda\neq 6,7$ 时 $T-\lambda I$ 都是可逆的（回顾正文中的定理），故 $T-8I$ 可逆（故是满射），因此一定存在 $(x,y,z)\in\mathbf{C}^3$ 使得 $(T-8I)(x,y,z)=(17,\sqrt{5},2\pi)$，因此存在 $(x,y,z)\in\mathbf{C}^3$ 使得 $T(x,y,z)=(17+8x,\sqrt{5}+8y,2\pi+8z)$.

5. 可对角化矩阵特征值（包括重数）相等则相似标准形（对角矩阵）相等，故一定相似. 不可对角化的举例说明不成立：$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的特征值全为 0（重数均为 3），但它们对应不同的若当标准形（之后章节会介绍），因此不相似.

6. 直接计算 $|\lambda E-A|=0$，得到 A 的特征值为 $-2,6,6$，因为 A 可对角化，则特征值 6 对应的特征子空间为 2 维，即 $(6E-A)X=0$ 的解空间为 2 维，根据齐次线性方程组一般理论，$r(6E-A)=3-2=1$，即 $r\begin{pmatrix}4&-2&0\\-8&4&-a\\0&0&0\end{pmatrix}=1$，显然 $a=0$. 接下来求解-2 和 6 对应的特征向量即可，得到可行的解 $P=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

7. (1) 上三角矩阵特征值就是所有主对角元 a_{ii}，$i=1,2,\ldots,n$；

   (2) 由（1）知主对角元互不相等表示 A 有 n 个互不相等的特征值，故可对角化；

   (3) 由 (1) 知此时 A 有一个 n 重特征值，记为 c，则所有特征向量都在 $(cE-A)X=0$ 的解空间中，而 $r(cE-A)=1$，故解空间维数为 $n-1<n$，故 A 不可对角化.

8. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(3) 根据讲义本讲开头的定理（线性变换在不同基下的表示），C_1 实际上就是基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 变为自然基 e_1, e_2, e_3 的过渡矩阵，简单计算可得 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. 不难解得 A 和 B 的特征值均为 $-1, 0, 1$，因此它们都与 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似，即 A 与 B 相似. 我们也可以解得 $P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 使得 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，故 $(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1}) = B$，即题目要求的 $P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. (1) A 与 B 相似则特征值相等，我们知道矩阵的对角线元素之和等于特征值之和，行列式等于特征值之积，则它们也一定相等. 根据这一原理非常容易解得 $x = 0, y = 1$.

(2) 事实上 B 就是对角矩阵，实际上这里就是求过渡矩阵 P 使 A 对角化，具体步骤不再赘述，得到 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

11. 令 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$，则 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$. 首先得到 A_1 和 A_2 的特征值分别为 $-1, 5$ 和 $-2, -2, 4$. 分别求过渡矩阵 P_1 和 P_2 使得 A_1，A_2 对角化，容

易解得 $P_1=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&2\end{pmatrix}$. 令 $P=\begin{pmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}P_1^{-1}A_1P_1&O\\O&P_2^{-1}A_2P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&-2&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&4\end{pmatrix},$$

即 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1,5,-2,-2,4)$，故 A 与 $\mathrm{diag}(-1,5,-2,-2,4)$ 相似. 总之，A 的特征值为 $-1,5,-2,-2,4$，过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$.

（注：通过本题也可以看出分块对角矩阵的特征值是两个对角块矩阵的并集，过渡矩阵就是两个过渡矩阵按同样分块方式排列得到的矩阵.）

12. 回顾对角化过程可知，令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，即 $P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}$，故 $A^n=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}P^{-1}$，最后可以计算得到 $A^n\beta=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}$.

13. 设 $A=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}$. 回顾矩阵运算进阶中介绍的求幂方法，我们发现 $A_2=2E+B$，其中 $B=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix}$，且 $B^2=O$，因此 $A_2^n=(2E+B)^n=2^nE+n2^{n-1}B=\begin{pmatrix}2^n&n2^{n+1}\\0&2^n\end{pmatrix}$. 再看 A_1，我们用对角化方法求幂，容易求得 $P=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}$ 使得 $P^{-1}A_1P=\begin{pmatrix}5&0\\0&-5\end{pmatrix}$，故 $A_1^n=P\begin{pmatrix}5^n&0\\0&(-5)^n\end{pmatrix}P^{-1}=5^{n-1}\begin{pmatrix}4+(-1)^n&2+2(-1)^{n+1}\\2+2(-1)^{n+1}&1+4(-1)^n\end{pmatrix}$，最后结合上面的讨论

得到 $A^n=\begin{pmatrix}A_1^n & O\\ O & A_2^n\end{pmatrix}$.

14. (1) 由题意，$PB=AP$，利用分块矩阵乘法可知 $PB=AP=(AX,A^2X,A^3X)=(AX,A^2X,3AX-2A^2X)$ (注意 $(AX,A^2X,A^3X)B=(AXB,A^2XB,A^3XB)$ 是错误的，因为这是 1×3 分块和 1×1 分块相乘，显然不能这么乘）.

则 $PB=(AX,A^2X,3AX-2A^2X)=(X,AX,A^X)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$. 等号两边左乘 P^{-1} 有 $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{pmatrix}$.

(2) 由于 A 与 B 相似，故有相同的特征值，易求得 B 的特征值为 $0,-3,1$，则 A 的特征值也为 $0,-3,1$，则 $A+E$ 的特征值根据正文例题可知为 $1,-2,2$，则 $A+E$ 的行列式为其特征值之积，即为 -4.

C 组

1. 暂略，有需要可以参考《线性代数应该这样学》作者给出的答案（见网页第五题）；

2. (1) $B^2=\alpha(\alpha^{\mathrm T}\alpha)\alpha^{\mathrm T}=m\alpha\alpha^{\mathrm T}=mB$，其中 $m=\alpha^{\mathrm T}\alpha=a_1^2+\cdot+a_n^2$，且易知这就是 $\mathrm{tr}(B)$. 用归纳法可知 $B^k=m^{k-1}B$，令 $t=m^{k-1}$ 则得证，其中 $t=(\mathrm{tr}(B))^{k-1}$.

(2) 这是经典的秩 1 矩阵，由于 B 的秩为 1，则 $BX=0$ 的解空间维数为 $n-1$，因此 0 是 B 的 $n-1$ 重特征值. 而特征值之和等于矩阵的迹. 则剩下一个一重特征值为 $\mathrm{tr}(B)$（由题意迹不为 0）.

然后求特征向量，这里需要一些观察. 特征值 0 对应的特征向量即为 $BX=0$ 的解，设解为 $(x_1,\dots,x_n)$，不失一般性地，设 $a_1\neq 0$，由于 B 的秩为 1，因此将 $BX=0$ 展开为线性方程组后，每一行（除去全 0 的）代表的方程是完全一致的（因为它们成比例），因此我们只需考虑第一行方程

$$a_1^2x_1+a_1a_2x_2+\cdots+a_1a_nx_n=0,$$

解得 $n-1$ 个线性无关特征向量为

$$X_1=(-a_2,a_1,0,\dots,0),X_2=(-a_3,0,a_1,0,\dots,0),\dots,X_{n-1}=(-a_n,0,\dots,0,a_1).$$

对于特征值 $\mathrm{tr}(B)=\alpha^{\mathrm T}\alpha$，我们可以设特征向量为 X，则 $(\mathrm{tr}(B)E-B)X=(\alpha^{\mathrm T}\alpha E-\alpha\alpha^{\mathrm T})X=0$，即 $\alpha^{\mathrm T}X=\alpha\alpha^{\mathrm T}X$，我们可以观察发现 α 就是一个解，则

$X_n=\alpha$ 是其特征向量. 则 $P=\begin{pmatrix}-a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n & a_1\\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_2\\ 0 & a_1 & \cdots & 0 & a_3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_n\end{pmatrix}$，且对角矩阵为 $\operatorname{diag}(0,\ldots,0,\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)$.

3. (1) 由题意知 A 的秩为 1，因此特征值 0 对应的特征子空间为 $AX=0$ 的解空间，维数为 $n-1$，故特征值 0 的重数至少为 $n-1$. 剩下可能还有一个特征值，我们知道特征值之和等于对角线元素之和，因此最后一个特征值等于 n，n 对应的特征子空间维数至少为 1，结合 0 对应特征子空间维数为 $n-1$ 可知 n 对应的特征子空间维数就是 1，二者可以张成整个 $\mathbf{R}^n$，因此可以对角化.

下面求过渡矩阵，n 对应的特征向量只需解方程 $(nE-A)X=0$，即得 $X_1=(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$. 0 对应的 $n-1$ 个线性无关特征向量就是 $AX=0$ 的基础解系，即 $X_2=(-1,1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},X_3=(-1,0,1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\ldots,X_n=(-1,0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$，令 $P=(X_1,X_2,\ldots,X_n)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\varLambda=\operatorname{diag}(n,0,\ldots,0)$.

(2) 由上一小问可知 $A=P\varLambda P^{-1}$，则 $A^k=P\varLambda^kP^{-1}$，故

$$A^k=P\varLambda^kP^{-1}=P\operatorname{diag}(n^k,0,\ldots,0)P^{-1},$$

故

$$\begin{aligned}
f(A) &= a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A \\
&= P(a_m \Lambda^m + a_{m-1}\Lambda^{m-1} + \cdots + a_1\Lambda)P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} f(n) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \frac{f(n)}{n} P \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \frac{f(n)}{n} P\Lambda P^{-1} = kA.
\end{aligned}$$

其中 $k = \dfrac{f(n)}{n}$. 故 $f(A) = kA$.

(3) 显然 $X = (1, 1, x \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 B 关于特征值 b 的特征向量，由于 b 是特征多项式的单根，则特征子空间维数也为 1，故特征向量就是 kX（其中 k 为非零常数）. 又 $f(B) = (B - bE)g(B) = O$，则 $Bg(B) = bg(B)$. 令 $g(B)$ 的列向量组为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，则上式可以写为 $B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (b\alpha_1, \ldots, b\alpha_n)$，即 $B\alpha_i = b\alpha_i$，即 α_i 是 B 关于特征值 b 的特征向量，故 $\alpha_i = k_i X = (k_i, k_i, \ldots, k_i)^{\mathrm{T}}$，即 $g(B) = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$. 由于 B 是实对称矩阵，故 $g(B)$ 也是实对称矩阵（很容易验证实对称矩阵经过幂次、加法运算后仍是实对称矩阵），因此 $g(B) = (g(B))^{\mathrm{T}}$，故 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = k$，即 $g(B) = kA$.

4. (1) 设 α 是 B 的特征向量, 对应的特征值为 λ, 即 $B\alpha = \lambda\alpha$, 则 $A\alpha + B\alpha - AB\alpha = 0$, 即 $A\alpha + \lambda\alpha - A\lambda\alpha = 0$，即 $(1-\lambda)A\alpha = -\lambda\alpha$. 若 $\lambda = 1$，则 $\alpha = 0$，与它是特征向量矛盾，故 $\lambda \neq 1$，从而 $A\alpha = \dfrac{-\lambda}{1-\lambda}\alpha$，这就说明了 B 的特征向量就是 A 的特征向量.

由 $A + B = AB$ 可知, $(A - E)(B - E) = E$, 故 $A - E$ 可逆, 且 $(A - E)^{-1} = B - E$, 从而 $E = (B - E)(A - E) = BA - A - B + E$，故 $BA = A + B$，同上理可得 A 的特征向量也是 B 的，得证.

(2) i. 必要性：若 A 可对角化，则 $\mathbf{R}^n$ 有一组由 A 的特征向量张成的基，由（1）知 B 与 A 特征向量一致，故 $\mathbf{R}^n$ 也有一组由 B 的特征向量张成的基，即 B

可对角化.

ii. 充分性与必要性类似.

(3) 由 $A+B=AB$ 可知 $A=(A-E)B$ 且 $B=A(B-E)$，由此可得 $r(A)\leqslant r(B)\leqslant r(A)$，故 $r(A)=r(B)$.

5. (1) 必要性：A 和 B 在实数域上相似，则存在可逆实矩阵 C 使得 $B=C^{-1}AC$，将 A,B,C 视为复数域上的矩阵，则可知 A 和 B 在复数域上也相似.

(2) 充分性：若 A 和 B 在复数域上相似，则存在可逆复矩阵 $P=P_1+\mathrm{i}P_2$ 使得 $B=P^{-1}AP$，其中 P_1,P_2 是实矩阵，即 $AP=PB$，从而 $A(P_1+\mathrm{i}P_2)=(P_1+\mathrm{i}P_2)B$，比较实部虚部可知 $AP_1=P_1B$ 且 $AP_2=P_2B$. 构造实系数多项式 $f(t)=|P_1+tP_2|$，显然 $f(\mathrm{i})=|P|\neq 0$，则 $f(t)$ 是非零多项式，所以 $f(t)$ 的根只有有限多个，从而存在 $t_0\in\mathbf{R}$ 使得 $f(t_0)\neq 0$，则 $|P_1+t_0P_2|\neq 0$，从而 $P_1+t_0P_2$ 可逆，从而 $A(P_1+t_0P_2)=AP_1+t_0AP_2=P_1B+t_0P_2B=(P_1+t_0P_2)B$，即 $(P_1+t_0P_2)^{-1}A(P_1+t_0P_2)=B$，即 A 和 B 在实数域上相似.

6. (1) i. 必要性：A 有 n 个互不相等的特征值，则 A 一定可对角化，则 A 有 n 个线性无关特征向量，记为 $X_1,\ldots,X_n$，则 $AX_i=\lambda_iX_i\ (X_i\neq 0)$，则 $A(BX_i)=B(AX_i)=\lambda_i(BX_i)$，即 BX_i 属于 A 的特征子空间 V_{λ_i}，又 λ_i 是 A 的单重特征值，对应的特征子空间是一维的，故 V_{λ_i} 中任两个向量成比例，即 $BX_i=\mu_iX_i$，故 X_i 也是 B 关于特征值 μ_i 的特征向量.

ii. 充分性：必要性：A 有 n 个互不相等的特征值，则 A 一定可对角化，则 A 有 n 个线性无关特征向量 $X_1,\ldots,X_n$，由于它们也是 B 的特征向量，故 B 可对角化. 设 $P=(X_1,\ldots,X_n)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda_1$，$P^{-1}BP=\Lambda_2$，其中 Λ_1 和 Λ_2 都是对角矩阵，则它们乘法可交换，即 $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$，上式两边左乘 P，右乘 P^{-1}，则 $AB=BA$.

(2) 由于 A 可对角化，所以存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\ldots,\lambda_sE_s)$，其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ 是 A 的所有互异特征值，$E_1,\ldots,E_s$ 分别是 $r_2,\ldots,r_s$ 阶单位矩阵，且 $r_1+\cdots+r_s=n$，由 $AB=BA$ 可知 $P^{-1}APP^{-1}BP=P^{-1}BPP^{-1}AP$，根据正文矩阵运算进阶中对矩阵乘法可交换问题的讨论中准对角矩阵的结论，我们有 $P^{-1}BP=\mathrm{diag}(B_1,\ldots,B_s)$，其中 B_i 是 r_i 阶矩阵. 由于 B 可对角化，因此 $P^{-1}BP$ 也可对角化（因为它和 B 相似，故它们有相同的相似标准形），从而 $B_1,\ldots,B_s$ 都可对角化，故对于任意的 $B_i(i=1,2,\ldots,s)$，存在可逆矩阵 Q_i 使得 $Q_i^{-1}B_iQ_i$ 是对角矩阵. 取 $Q=\mathrm{diag}(Q_1,\ldots,Q_s)$，则 $Q^{-1}P^{-1}BPQ=\mathrm{diag}(Q_1^{-1}B_1Q_1,\ldots,Q_s^{-1}B_sQ_s)$ 是对角矩阵，同时有

$$Q^{-1}P^{-1}APQ=\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\ldots,\lambda_sE_s),$$

则 $Q^{-1}P^{-1}APQ=\mathrm{diag}(\lambda_1Q_1^{-1}Q_1,\ldots,\lambda_sQ_s^{-1}Q_s)=\mathrm{diag}(\lambda_1E_1,\ldots,\lambda_sE_s)$ 为对角矩阵，因此取 $T=PQ$ 就有 $T^{-1}AT$ 和 $T^{-1}BT$ 都是对角矩阵.

7. 此题条件与 C 组 15 题相同，因此我们知道存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是对角矩阵（因为 A 的 n 个线性无关特征向量也是 B 的线性无关特征向量）. 设 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$，$P^{-1}BP = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$，并设 $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 满足 $f(A) = B$，则 $a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = B$，从而

$$a_{n-1}(P^{-1}AP)^{n-1} + \cdots + a_1(P^{-1}AP) + a_0 E = P^{-1}BP,$$

即

$$\begin{cases} a_{n-1}\lambda_1^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_1 + a_0 = \mu_1 \\ a_{n-1}\lambda_2^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_2 + a_0 = \mu_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n-1}\lambda_n^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_n + a_0 = \mu_n \end{cases}$$

由于 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 两两不同，故上述方程组有唯一解（回忆范德蒙行列式和 Cramer 法则），从而 $a_0, \dots, a_{n-1}$ 有唯一解，得证.

8. 设 T 在这样的基下的矩阵为上三角矩阵 A，则 T 的特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m}$，其中 r_i 是特征值 λ_i 在矩阵对角线上出现的次数，而 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\dim E(\lambda_1, T)} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{\dim E(\lambda_m, T)}$，因此有 $r_i = \dim E(\lambda_i, T)$. 即 λ 出现在 T 的矩阵的对角线上的次数等于 λ 作为 T 的特征值的重数.

9. A 为幂零矩阵 $\iff$ A 的所有特征值均为 0.

   设 $A = P^{-1}BP$, 其中 B 为上三角矩阵，设 B 对角线上元素为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，则对 $\forall k \in \mathbf{N}_+$，$B^k$ 为上三角矩阵且对角线上为 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$.

   这表明 A 是幂零矩阵 $\iff$ B 只有特征值 0 $\iff$ $\forall k \in \mathbf{N}_+, B^k$ 特征值全为 0 $\iff$ $\forall k \in \mathbf{N}_+, A^k$ 特征值全为 0 $\iff$ $\forall k \in \mathbf{N}_+, \mathrm{tr}(A^k) = 0$.

第 16 讲　若当标准形

第 17 讲　多项式的进一步讨论

第 18 讲　有理标准形

第 19 讲　内积空间

第 20 讲 内积空间上的算子

未竟专题八　希尔伯特空间引论

第 21 讲　奇异值分解

第 22 讲　线性代数与几何

第 23 讲　二次型

第 24 讲　多重线性映射与张量的计算

第 25 讲　线性代数与微积分

第 26 讲　线性代数与最优化问题

未竟专题十四　范畴论视角下的线性代数

线性代数 I（H）期中/小测历年卷试题集

2020-2021 学年线性代数 I（H）小测 1

任课老师：谈之奕　　　　考试时长：90 分钟

一、（10 分）求全部实数 a，使线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2-2x_3=-3 \\ ax_1-2x_2+2x_3=6 \end{cases}$ 的解集非空.

二、（10 分）设 $\mathbf{R}^4$ 是 4 维欧氏空间（标准内积），$\alpha=(1,1,1,1)$，$\beta=(-1,-1,0,2)$，$\gamma=(1,-1,0,0)\in\mathbf{R}^4$，求：

(1) 与 α, β, γ 都正交的一个单位向量 δ；

(2) $||\alpha+\beta+\gamma+\delta||$.

三、（15 分）记线性映射 σ 的核为 $\ker\sigma$，像为 $\operatorname{im}\sigma$. 设 $\sigma_1,\sigma_2:V\to V$ 是线性映射，证明：

(1) $\ker\sigma_1\subseteq\ker(\sigma_2\circ\sigma_1)$；

(2) $\operatorname{im}(\sigma_2\circ\sigma_1)\subseteq\operatorname{im}\sigma_2$.

四、（15 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性空间 V 的一组基，$T\in\mathcal{L}(V)$，且 $T(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2$，$T(\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2$，$T(\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2$. 求 T 的像空间和核空间，以及 T 的秩.

五、（15 分）设 W 是线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \end{cases}$ 的解空间，求 W 的一组单位正交基，并将其扩充成 $\mathbf{R}^4$ 的单位正交基，这里 $\mathbf{R}$ 是实数域.

六、(15 分) 设 $\mathbf{R}[x]_4$ 是数域 $\mathbf{R}$ 上次数小于 4 的多项式所构成的线性空间 (约定零多项式次数为 $-\infty$) . $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 上 2 阶方阵所构成的线性空间, 定义 $T : \mathbf{R}[x]_4 \to \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 如下, 对 $f(x) \in \mathbf{R}[x]_4$,

$$T(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) & f(1) \\ f(-1) & f(0) \end{pmatrix}$$

(1) 求出 T 的核空间 $N(T)$ 和像空间 $R(T)$;

(2) 验证关于 T 的维数公式.

七、(20 分) 判断下列命题的真伪, 若它是真命题, 请给出简单的证明; 若它是伪命题, 给出理由或举反例将它否定.

(1) 若 S 是线性空间 V 的线性相关子集, 则 S 的每个向量都是 S 的其他向量的线性组合;

(2) 若线性映射 $T : V \to W$ 的核是 K, 则 $\dim V = \dim W + \dim K$;

(3) 线性空间 V 的任何子空间 W 都是某个映射 $T : V \to V$ 的核;

(4) 在 5 维欧式空间 V 中, 存在两组线性无关向量 $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ 和 $S_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$, 使其满足内积 $\langle v_i, w_j \rangle = 0$, 其中 $i, j = 1, 2, 3$.

2020-2021 学年线性代数 I（H）小测 2

任课老师：谈之奕　　　　考试时长：90 分钟

一、（10 分）称实矩阵 $A=(a_{ij})$ 是整数矩阵，如果每个 a_{ij} 都是整数. 设 M 是整数矩阵，且可逆（作为实矩阵）. 证明：M 的逆矩阵也是整数矩阵的充要条件是 M 的行列式等于 ± 1.

二、（15 分）设 $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ 是线性空间 V 的一组基，线性映射 $\sigma: V\to V$ 定义如下：

$$\sigma(v_1)=v_2+v_3, \sigma(v_2)=v_3, \sigma(v_3)=v_1-v_2.$$

(1) 求 σ 在基 B 下的矩阵；

(2) 证明：$B'=\{v_2,v_3+v_1,v_1-v_2\}$ 是 V 的另一组基；

(3) 求 σ 在基 B' 下的矩阵.

三、（15 分）设

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

定义 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 上映射 σ：

$$\sigma(A)=PAQ.$$

(1) 验证 σ 是线性映射；

(2) 求 $\operatorname{im}\sigma$ 和 $\ker\sigma$；

(3) 验证关于 σ 的维数公式.

四、（15 分）求参数 a，b 的值，使得 $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\u&v&w\end{vmatrix}=1$, $\begin{vmatrix}1&2&-5\\x&y&z\\u&v&w\end{vmatrix}=2$, $\begin{vmatrix}2&3&b\\x&y&z\\u&v&w\end{vmatrix}=a$ 都成立，并求 $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&-1&5\\u&v&w\end{vmatrix}$.

五、（15 分）设在 $\mathbf{F}[x]_3$ 中有两组基：

$$(A)\alpha_1=1-x, \alpha_2=-x+x^2, \alpha_3=3x-2x^2;$$

$$(B)\beta_1=4x+5x^2, \beta_2=-1, \beta_3=3x+4x^2.$$

(1) 求基 (A) 到基 (B) 的过渡矩阵；

(2) 设 α 在基 (A) 下的坐标为 $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，求 α 在基 (B) 下的坐标.

六、（10 分）设 $A \in M_{m\times n}(\mathbf{F})$，$r(A)=r$，$k$ 是满足条件 $r \leqslant k \leqslant n$ 的任意整数，证明存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=0$，且 $r(A)+r(B)=k$.

七、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 域 $\mathbf{F}$ 上的全体 n 阶可逆矩阵构成 $M_n(\mathbf{F})$ 的一个子空间；

(2) 设 A 和 B 都是可逆矩阵，则矩阵 $\begin{pmatrix} O & B \\ A & C \end{pmatrix}$ 也是可逆矩阵；

(3) 可逆矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的行列式等于 1；

(4) 若对于任何正整数 n，方阵 A（阶数大于 1）的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 可逆.

2020-2021 学年线性代数 I（H）期中

任课老师：吴志祥　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）设方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ ax_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间为 V_1，方程组：

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + bx_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 13x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间为 V_2 ，问 a, b 为何值时，$\mathbf{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

二、（10 分）设 $V = \{(a_{ij})_{n\times n} \mid \forall i,\ j,\ a_{ij} = a_{ji}\}$

(1) 证明：V 为 $F^{n\times n}$ 的子空间；

(2) 求 V 的基和维数.

三、（10 分）设 $f_1 = -1 + x,\ f_2 = 1 - x^2,\ f_3 = 1 - x^3,\ g_1 = x - x^2,\ g_2 = x + x^3,\ V_1 = L(f_1,\ f_2,\ f_3)$，$V_2 = L(g_1,\ g_2)$，求：

(1) $V_1 + V_2$ 的基和维数；

(2) $V_1 \cap V_2$ 的基和维数；

(3) V_2 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 空间的补.

四、（10 分）设 $\epsilon_1,\ \epsilon_2$ 为 n 维欧氏空间 V 的两个单位正交向量，定义

$$\sigma(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \epsilon_1)\epsilon_1 - 2(\alpha, \epsilon_2)\epsilon_2$$

证明：

(1) σ 是 V 上的线性变换；

(2) $\forall \alpha,\ \beta \in V,\ (\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) = (\alpha, \beta)$.

五、（10 分）已知 n 阶矩阵 A 的秩为 1 ，证明：$A^k = \mathrm{tr}(A)^{k-1}A$.（注：tr 为矩阵的迹，即矩阵的对角线元素之和）

六、（10 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & x & y \end{pmatrix}$ 的逆是 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$，且已知矩阵 $B=\begin{pmatrix} a-2b & b-3c & -c \\ d-2e & e-3f & -f \\ h-2x & x-3y & -y \end{pmatrix}$. 求矩阵 X 满足：

$$X+(B(A^{\mathrm{T}}B^2)^{-1}A^{\mathrm{T}})^{-1}=X(A^2(B^{\mathrm{T}}A)^{-1}B^{\mathrm{T}})^{-1}(A+B).$$

七、（10 分）设 $V(\mathbf{F})$ 是一个 n 维线性空间，$\sigma\in L(V,V)$，证明：

(1) 在 $\mathbf{F}[x]$ 中有一个次数不高于 n^2 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$；

(2) σ 可逆 $\iff$ 有一常数项不为 0 的多项式 $p(x)$ 使 $p(\sigma)=0$.

八、（10 分）已知三维线性空间 V 的线性变换 σ 关于基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 σ 在基 $\{\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\}$ 下对应的矩阵 B，其中：

$$\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3,\ \beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\ \beta_3=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$$

(2) 求 σ 的值域 $\sigma(V)$ 和核 $\ker\sigma$；

(3) 把 $\sigma(V)$ 的基扩充为 V 的基，并求 σ 在这组基下对应的矩阵；

(4) 把 $\ker\sigma$ 的基扩充为 V 的基，并求 σ 在这组基下对应的矩阵.

九、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 若 α_1，α_2，α_3 线性相关，则 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 也线性相关；

(2) 一个有限维线性空间只包含有限个子空间；

(3) 已知 $\sigma\in L(V,\ V)$，$\dim V=n$，则由 $r(\sigma)+\dim(\ker\sigma)=n$ 可得 $\mathrm{Im}\sigma+\ker\sigma=V$；

(4) 若对于任何正整数 n，方阵 A (阶数大于 1) 的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 是可逆的.

2021-2022 学年线性代数 I（H）小测

任课老师：刘康生　　　　考试时长：90 分钟

一、 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 假设线性方程组 $Ax = \beta$ 有解但解不唯一.

(1) 求 a 的值；

(2) 给出 $Ax = \beta$ 的一般解.

二、 设

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

定义 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 上映射 σ：

$$\sigma(A) = PAQ.$$

(1) 验证 σ 是线性映射；

(2) 求 $\operatorname{im}\sigma$ 和 $\ker\sigma$；

(3) 验证关于 σ 的维数公式.

三、 设 B 是 3×1 矩阵，C 是 1×3 矩阵，证明：$r(BC) \leqslant 1$；反之，若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，证明：存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C，使得 $A = BC$.

四、 设 $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 V 的一组基，$T \in \mathcal{L}(V)$，$T(\beta_1) = \beta_2$，$T(\beta_2) = \beta_3$，$\cdots$，$T(\beta_{n-1}) = \beta_n$，$T(\beta_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\beta_i (a_i \in \mathbf{R})$. 求 T 在 B 下的表示矩阵. 在什么条件下 T 是同构映射?

五、 设 A^* 是 n 阶方阵 A 的伴随矩阵，求 A^* 的秩.

六、 判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 给定线性空间 V 的非零向量 v 和线性空间 W 的向量 w，总存在线性映射 $T: V \to W$，使得 $T(v) = w$；

(2) 若线性方程组有 m 个方程，n 个变量，且 $m < n$，则这个方程组一定有非零解；

(3) 若方阵 $A^3 = 0$，则 $E + A$ 和 $E - A$ 都是可逆矩阵；

(4) 若方阵 $A^2 = A$，则 $E + A$ 和 $E - A$ 都是可逆矩阵.

2021-2022 学年线性代数 I（H）期中

任课老师：吴志祥　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -a\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}3\\ 9\\ -6\end{pmatrix}$，且 $AX=b$ 无解，求 a.

二、（10 分）证明替换定理：设向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性无关，$\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_s\alpha_s$. 如果 $\beta_i\neq 0$，则 β 可替换 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 中的某个向量成为一个新的线性无关向量组.

三、（10 分）设 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\}$ 是欧式空间 V 的一组标准正交基，$W=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_5,\alpha_3=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$.

(1) 求 α_1,α_2 的夹角；

(2) 求 W 的一组标准正交基.

四、（10 分）证明：如果向量组 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ 的秩为 r，那么该向量组中任意 s 个向量组成的子集的秩大于等于 $r+s-m$.

五、（10 分）在 $\mathbf{R}^3$ 中取三个向量

$$\alpha_1=(1,-2,0),\alpha_2=(-3,0,-2),\alpha_3=(2,4,3),$$

设 σ 是满足 $\sigma(\alpha_i)=\mathrm{e}_i(i=1,2,3)$ 的线性变换，其中 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的自然基.

(1) 求 σ 关于自然基所对应的矩阵；

(2) 求向量 $\alpha_1=(-2,5,6)$ 在 σ 下的像.

六、（10 分）已知 $\mathbf{R}[x]_n$ 的线性变换 σ 满足 $\sigma(p(x))=p(x+1)-p(x)$，$p(x)\in\mathbf{R}[x]_n$.

(1) 求 σ 的秩与核；

(2) 求所有可能的 $p(x)\in\mathbf{R}[x]_n$ 和 $\lambda\in\mathbf{R}$ 使得 $\sigma(p(x))=\lambda p(x)$.

七、（10 分）设 $B=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ 是 4 维线性空间 V 的一组基，σ 关于基 B 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix},$$

求 σ 的像与核.

八、（10 分）域 $\mathbf{F}$ 上所有 $m\times n$ 矩阵组成的集合 $M_{m\times n}(\mathbf{F})$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间. 定义 $V_i=\{Ae_{ii}\mid A\in M_{m\times n}(\mathbf{F})\}(i=1,2,\ldots,n)$，其中 e_{ij} 是第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素均为 0 的 n 阶矩阵，证明：

(1) V_i 是 $M_{m\times n}(\mathbf{F})$ 的子空间；

(2) $M_{m\times n}(\mathbf{F})=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$.

九、（20 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 正整数集 $\mathbf{R}^+$ 对如下定义的加法和数量乘法构成整数 $\mathbf{Z}$ 上的线性空间：

$$a\oplus b=ab,\ \ \lambda\circ a=a^{\lambda},\ \ \forall a,b\in\mathbf{R}^+,\lambda\in\mathbf{Z};$$

(2) 设 $\sigma\in\mathcal{L}(V),\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组基,则 σ 可逆当且仅当 $\{\sigma(\alpha_1),\ldots,\sigma(\alpha_n)\}$ 是 V 的一组基；

(3) 对任意实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 V，都能找到有限个 V 的非平凡子空间 $V_1,\ldots,V_m$ 使得 $V_1\cup\cdots\cup V_m$；

(4) 与所有 n 阶矩阵可交换的矩阵一定是 n 阶数量矩阵.

2022-2023 学年线性代数 I（H）期中

任课老师：刘康生　　　　考试时长：45 分钟

一、 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 假设线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但解不唯一.

(1) 求 a 的值；

(2) 给出 $Ax=\beta$ 的所有解.

二、 设

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

定义 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 上映射 σ：

$$\sigma(A)=PAQ.$$

(1) 验证 σ 是线性映射；

(2) 求 $\operatorname{im}\sigma$ 和 $\ker\sigma$；

(3) 求 $\mathbf{R}^{3\times 2}$ 的两组基 B_1,B_2，使得 σ 在 B_1,B_2 下的矩阵为对角矩阵.

三、 设 $B=\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上线性空间 V 的一组基, $T\in\mathcal{L}(V)$, $T(\beta_1)=\beta_2$, $T(\beta_2)=\beta_3$，$\cdots$，$T(\beta_{n-1})=\beta_n$，$T(\beta_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\beta_i(a_i\in\mathbf{R})$. 求 T 在 B 下的表示矩阵. 在什么条件下 T 是同构映射?

四、 判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 若 W 是线性空间 V 的子空间，$\alpha\in V$，则 $\alpha+W$ 是 V 的子空间；

(2) 若 W 是线性空间 V 的子空间，对任何的 $\alpha\in V$，定义 $\overline{\alpha}=\alpha+W$，则

$$\overline{\alpha}=\overline{\beta}\ \text{或者}\ \overline{\alpha}\cap\overline{\beta}=\varnothing;$$

(3) 若方阵 $A^3=0$，则 $E+A$ 和 $E-A$ 都是可逆矩阵；

(4) 若方阵 $A^2=A$，则 $E+A$ 和 $E-A$ 都是可逆矩阵.

2022-2023 学年线性代数 I（H）期中

任课老师：谈之奕　　　　考试时长：90 分钟

一、（15 分）参数 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 = \lambda \end{cases}$$

有解？当方程组有解时，求其一般解.

二、（15 分）设 $\alpha_1 = (1,1,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (3,4,4,7)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3 = (-2,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4 = (5,3,4,6)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_5 = (4,5,3,13)^{\mathrm{T}}$，试求向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ 的一组极大线性无关组.

三、（15 分）

(1) 已知 $\mathbf{R}^2$ 上的线性变换 $\sigma(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 - 2x_2)$，$I$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的恒等变换，求 $\ker\sigma$ 和 $\operatorname{im}(I-\sigma)$；

(2) 设 τ 为 $\mathbf{R}^n$ 上任一线性变换，I 为 $\mathbf{R}^n$ 上恒等变换，证明：$\ker\tau \subseteq \operatorname{im}(I-\tau)$. 又 $\operatorname{im}\tau \subseteq \ker(I-\tau)$ 是否一定成立？

四、（25 分）设 $\mathbf{R}[x]_3$ 是次数小于等于 3 的实系数多项式的全体和零多项式一起组成的集合关于多项式加法和数乘构成的实数域上的线性空间.

(1) 证明：$W = \{f(x) \in \mathbf{R}[x]_3 \mid f(1) = 0\}$ 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 的子空间，并求 $\dim W$ 和 W 的一组基；

(2) 定义从 $\mathbf{R}[x]_3$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 T 如下：对任意 $f(x) \in \mathbf{R}[x]_3$，$T(f(x)) = f(1)$，证明：T 是线性映射，并求 $\dim\ker T$ 和 $\operatorname{im} T$；

(3) 设 $f,g,h \in \mathbf{R}[x]_3$，且 $f(1) = g(1) = h(1) = 0$，证明：f,g,h 线性相关.

五、（30 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 线性表示，则向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta$ 线性无关；

(2) 实数集 $\mathbf{R}$ 对实数的加法与实数的乘法构成任意数域上的线性空间；

(3) 记 $\mathbf{R}^n_k$ 为至多有 k 个分量为非零实数的 n 元向量全体，$\mathbf{R}^n_k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间；

(4) 若 S 是线性空间 V 的线性相关子集，则 S 的每个向量都是 S 的其他向量的线性组合；

(5) 若线性映射 $T: V \to W$ 的核是 K，则 $\dim V = \dim W + \dim K$；

(6) 线性空间 V 的任何子空间 W 都是某个映射 $T: V \to V$ 的核.

2022-2023 学年线性代数 I（H）期中

任课老师：吴志祥　　　　考试时长：90 分钟

一、（10 分）讨论当 a 取何值时，下列方程组有解？无解？

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}.$$

二、（10 分）证明向量组 $\{2\alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_3+\alpha_1\}$ 线性无关的充分必要条件是向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 线性无关.

三、（10 分）已知向量 $\alpha_1=(1,2,4,3)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1,-1,-6,6)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(-2,-1,2,-9)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_4=(1,1,-2,7)^{\mathrm{T}}$，$\beta=(4,2,4,a)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求子空间 $W=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数和一组基；

(2) 求 a 的值，使得 $\beta\in W$，并求 β 在（1）中选取的基下的坐标.

四、（10 分）设 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 是欧式空间 V 的一组标准正交基，$W=\mathrm{span}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4, \alpha_2=3\varepsilon_1+3\varepsilon_2-\varepsilon 3-\varepsilon_4, \alpha_3=-2\varepsilon_1+6\varepsilon_3+8\varepsilon_4$.

(1) 求 α_1,α_2 的夹角；

(2) 求 W 的一组标准正交基.

五、（10 分）已知 $f_1=1-x, f_2=1+x^2, f_3=x+2x^2$ 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 中三个元素，σ 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 上的线性变换且满足 $\sigma(f_1)=2+x^2, \sigma(f_2)=x, \sigma(f_3)=1+x+x^2$.

(1) 证明：f_1,f_2,f_3 构成 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组基；

(2) 求 σ 在基 $\{f_1,f_2,f_3\}$ 下的矩阵；

(3) 设 $f=1+2x+3x^2$，求 $\sigma(f)$.

六、（10 分）已知 $\mathbf{R}^3$ 的两个线性变换 σ,τ 为

$$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+3x_3,-x_1+2x_2-x_3,0),$$

$$\tau(x_1,x_2,x_3)=(x_2,x_3,0).$$

(1) 求 $r(\sigma+\tau)$ 和 $r(\sigma\tau)$；

(2) 求 $\mathrm{im}\,\sigma+\ker\sigma$.

七、（10 分）设 $M_n(\mathbf{R})$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 n 阶矩阵组成的集合. 设 $W=\{A\in M_n(\mathbf{R}) \mid a_{ji}=ka_{ij},\ i\leqslant j\}$，求当 $k=0,1,2$ 时，W 的一组基和维数.

八、（10 分）设 V 是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 是 V 的一组基，且

$$V_1=\operatorname{span}(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n)$$
$$V_2=\left\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n \,\middle|\, k_1+\frac{k_2}{2}+\cdots+\frac{k_n}{n}=0\right\}$$

证明:

(1) V_2 是 V 的子空间;

(2) $V=V_1\oplus V_2$.

九、(20 分) 判断下列命题的真伪, 若它是真命题, 请给出简单的证明; 若它是伪命题, 给出理由或举反例将它否定.

(1) $\forall n\geqslant 2$，不存在非零实线性映射 $f: M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 使得 $f(AB)=f(A)f(B)$；

(2) 设 W_1,W_2 是线性空间 V 的两个子空间, $W_1\cup W_2=W_1+W_2$ 当且仅当 $W_1\subseteq W_2$ 或 $W_2\subseteq W_1$；

(3) 设 α,β 是欧式空间 V 中两个线性无关向量，且 $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ 和 $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 都是不大于零的整数，则 α 和 β 的夹角只可能是 $\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{6}$;

(4) n 是一个大于 1 的整数，$W=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{C}^n \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=0\}$ 是复线性空间 $\mathbf{C}^n$ 的一个子空间.

线性代数 I（H）期末历年卷试题集

2009-2010 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）记 $C([0,2\pi],\mathbf{R})$ 是区间 $[0,2\pi]$ 上全体连续函数作成的实线性空间，对 $f,g\in C([0,2\pi],\mathbf{R})$，用

$$(f,g)=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

来定义内积. 如果

$$f,g:[0,2\pi]\to\mathbf{R},f(x)=x,g(x)=\sin x$$

求 f 与 g 的夹角 θ.

二、（10 分）设 V 是次数 $\leqslant 2$ 的实多项式线性空间，$T:V\to V$,

$$T(f(x))=f(x)+xf'(x).$$

求 T 的特征值. 对于每个特征值，求属于它的特征子空间.

三、（10 分）设 B 是 3×1 矩阵，C 是 1×3 矩阵，证明：$r(BC)\leqslant1$；反之，若 A 是秩为 1 的 3×3 矩阵，证明：存在 3×1 矩阵 B 和 1×3 矩阵 C，使得 $A=BC$.

四、（10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&1\\-1&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. 假设线性方程组 $AX=\beta$ 有解但解不唯一.

(1) 求 a 的值；

(2) 给出 $AX=\beta$ 的一般解.

五、(10 分) 设 A 是可逆实矩阵.

(1) 证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 是对称矩阵;

(2) 证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 是正定的.

六、(10 分) 令 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$.

(1) 求可逆矩阵 $Q\in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ 使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 是对角矩阵;

(2) 给出 A 的正惯性指数、负惯性指数, 并确定 A 的定性.

七、(10 分) 设 $\beta=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 是 V 的一组基, $T:V\to V$ 是线性变换,

$T(v_1)=v_2,T(v_2)=v_3,\ldots,T(v_{n-1})=v_n,T(v_n)=a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$.

求 T 关于 β 的矩阵表示. 以及, 在什么条件下 T 是同构?

八、(10 分) 设 $A\in M_{n\times n}(\mathbf{F})$ 有两个不同的特征值 λ_1,λ_2, 且属于 λ_1 的特征子空间的维数是 $n-1$, 证明: A 是可对角化的.

九、(20 分) 判断下面命题的真伪. 若它是真命题, 给出一个简单证明; 若它是伪命题, 举一个具体的反例将它否定.

(1) 给定线性空间 V 的非零向量 v 和线性空间 W 的向量 w, 总存在线性映射 $T:V\to W$ 使得 $T(v)=w$.

(2) 若线性方程组有 m 个方程, n 个变量, 且 $m<n$, 则这个方程组一定有非零解.

(3) 若 n 阶方阵 A 的秩是 n, 则 A 是可逆的.

(4) 正交变换是可对角化的.

2010-2011 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求全部的实数 a，使线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2-2x_3=-3 \\ ax_1-2x_2+2x_3=6 \end{cases}$ 的解集非空.

二、（10 分）设 $M_{3\times 2}(\mathbf{F})$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上全体 3×2 矩阵构成的线性空间,

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义 $T: M_{3\times 2}(\mathbf{F})\to M_{3\times 2}(\mathbf{F})$ 如下，对任意的 $A\in M_{3\times 2}(\mathbf{F})$ 有 $T(A)=PAQ$.

(1) 证明 T 是线性映射.

(2) 求出 T 的像空间和核空间.

(3) 验证关于 T 的维数公式.

三、（10 分）设 A 和 B 是 n 阶方阵，其中 n 是奇数. 若 $AB=-BA$，证明：A 是不可逆的或者 B 是不可逆的.

四、（10 分）设 V 是欧氏空间，$\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 且 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. 证明

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})|=|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

当且仅当存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}$.

五、（10 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实正交矩阵.

(1) 证明 $|\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}|\leqslant n$.

(2) 在什么条件下等式成立?

六、（10 分）求 2×2 实矩阵 A，使得 A 的特征值是 2 和 1，而对应于 2 的特征子空间由 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成，对应于 1 的特征子空间由 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 生成.

七、（10 分）设 n 阶方阵 A 和 B 都可对角化，并且它们有相同的特征子空间（但不一定有相同的特征值），证明 $AB=BA$.

八、（10 分）实三元二次多项式 $f:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R}$ 的定义是

$$f(x,y,z)=2x^2-8xy+y^2-16xz+14yz+5z^2.$$

(1) 给出 3×3 实对称矩阵 A，使 $f(x,y,z)=(x,y,z)A(x,y,z)^{\mathrm{T}}$.

(2) 给出一个与 A 相合的对角矩阵.

(3) 给出 A 的秩，正惯性指数和负惯性指数.

九、（20 分）判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(1) 若线性映射 $T_1,T_2:V\to W$ 对 V 的一组基中的每一个基向量 v 满足 $T_1(v)=T_2(v)$，则 $T_1=T_2$.

(2) 若对于任何正整数 n，方阵 A（阶数大于 1）的 n 次乘积 A^n 都是非零方阵，则 A 可逆.

(3) 若线性映射 $T:V\to W$ 的核是 K，则 $\dim V=\dim W+\dim K$.

(4) 若方阵 A 相似于方阵 B，则 A 与 B 有相同的特征向量.

2011-2012 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求 $a,b,c,d,e,f\in\mathbf{R}$，使 $(1,1,1)^{\mathbf{T}},(1,0,-1)^{\mathbf{T}},(1,-1,0)^{\mathbf{T}}\in\mathbf{R}^{\mathbf{3}}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}$ 的特征向量.

二、（10 分）记线性映射 σ 的核为 $\ker\sigma$，像为 $\operatorname{im}\ \sigma$. 设 $\sigma_1,\sigma_2:V\to V$ 是线性映射. 证明：

(1) $\ker\sigma_1\subseteq\ker(\sigma_2\circ\sigma_1)$.

(2) $\operatorname{im}(\sigma_2\circ\sigma_1)\subseteq\operatorname{im}\ \sigma_2$.

三、（10 分）设 $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ 是线性空间 V 的一组基，线性映射 $\sigma:V\to V$ 定义如下：

$$\sigma(v_1)=v_2+v_3,\sigma(v_2)=v_3,\sigma(v_3)=v_1-v_2.$$

(1) 给出 σ 关于基 B 的矩阵表示.

(2) 证明 $B'=\{v_2,v_3+v_1,v_1-v_2\}$ 是 V 的另一组基.

(3) 给出 σ 关于基 B' 的矩阵表示.

四、（10 分）设 $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 是欧氏空间 V 的一组单位正交基. 证明：对于任何 $u\in V$，成立

$$|u|^2=(u,v_1)^2+(u,v_2)^2+\cdots+(u,v_n)^2.$$

五、（10 分）记 $P_2(\mathbf{R})$ 为次数小于等于 2 的实多项式线性空间.

(1) 证明：$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 是 $P_2(\mathbf{R})$ 的内积.

(2) 将 Schmidt 正交化过程应用于 $S=\{1,x,x^2\}$，求出 $P_2(\mathbf{R})$ 的一组单位正交基 B.

六、（10 分）设 $\sigma:V\to V$ 是有限维线性空间 V 上的一个同构映射. 记 $V(\sigma;\lambda)$ 为 σ 的属于特征值 λ 的特征子空间.

(1) 如果 λ 是 σ 的特征值，证明：$\lambda\neq0$.

(2) 证明 λ 是 σ 的特征值，证明：$V(\sigma;\lambda)=V(\sigma^{-1};\lambda^{-1})$.

(3) 证明 "σ 可对角化" 的充要条件是 "σ^{-1} 可对角化".

七、（10 分）求下面实对称矩阵的秩，正惯性指数和负惯性指数.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 9 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & -5 & 10 & 9 \\ -3 & -1 & 9 & -14 \end{pmatrix}$.

八、（10 分）设 A, B 都是域 $\mathbf{F}$ 上的 n 阶对角矩阵，且 A 的对角元是 B 的对角元的一个置换. 证明：

(1) A 相似于 B.

(2) A 相合于 B.

九、（20 分）判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(1) 若 S 是线性空间 V 的线性相关子集，则 S 的每个向量都是 S 的其他向量的线性组合.

(2) 域 F 上的全体 n 阶可逆阵构成 $M_{n\times n}(F)$ 的一个子空间.

(3) 若存在正整数 n，使得方阵 A 的 n 次幂 $A^n = 0$，则 A 的行列式 $|A| = 0$.

(4) 对任意的 n 阶实对称阵 A，总存在 ϵ，使得 $E_n + \epsilon A$ 是正定矩阵.

2012-2013 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求实线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$ 的解集.

二、（10 分）设 A 是域 $\mathbf{F}$ 上的 $m \times n$ 矩阵，A 的秩 $r(A) = 1$.

(1) 证明存在（列向量）$X \in \mathbf{F^m}$ 和 $Y \in \mathbf{F^n}$ 使得 $A = XY^{\mathbf{T}}$, 其中 $Y^{\mathbf{T}}$ 是 Y 的转置.

(2) X 和 Y 是否唯一?

三、（10 分）定义线性映射 $T : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ 如下：对任意的 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R^n}$

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_n + x_1).$$

试给出 T 的核 $\ker(T)$ 和 T 的像 $\mathrm{im}(T)$ 的维数.

四、（10 分）设 V 是域 $\mathbf{F}$ 上有限维线性空间，$T : V \to V$ 是线性映射. 证明 V 的非零向量都是 T 的特征向量当且仅当存在 $\alpha \in \mathbf{F}$，使 $T(v) = \alpha v$ 对于任何 $v \in V$ 成立.

五、（10 分）设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵，其中 $b \neq 0$；λ 是 A 的特征值.

(1) 证明 $\lambda \neq 0$.

(2) 证明 $(b, \lambda - a)^{\mathbf{T}}$ 是属于 λ 的特征向量.

(3) 若 A 有两个不同的特征值 λ_1 和 λ_2，求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

六、（10 分）实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 Q 使 $Q^{\mathbf{T}}AQ$ 是对角矩阵.

七、（10 分）设 V 是欧式空间，$T : V \to V$ 是线性映射，$\lambda \in \mathbf{R}$，u 是 V 的非零向量. 证明：λ 是 T 的特征值且 u 是属于 λ 的特征向量当且仅当对于任何 $v \in V$ 成立 $(T(u), v) = \lambda(u, v)$.

八、（10 分）设 n 阶实对称阵 A 满足方程 $A^2 - 6A + 5I_n = 0$，其中 I_n 是 n 阶单位矩阵.

(1) 证明 A 是正定的.

(2) 若 $n = 2$，试给出全部有可能与 A 相似（注意，不是相合!）的对角矩阵.

九、(20 分) 判断下面命题的真伪. 若它是真命题, 给出一个简单证明; 若它是伪命题, 举一个具体的反例将它否定.

(1) 若有限维线性空间 V 的线性映射 $T: V \to V$ 是可对角化的, 则 T 是同构.

(2) 若 A, B 是对称矩阵, 则 AB 也是对称矩阵.

(3) 若 n 阶方阵 A, B 中的 A 是可逆的, 则 AB 与 BA 是相似的.

(4) 若 $n(n > 1)$ 阶方阵 A 的特征多项式是 $f(\lambda) = \lambda^n$, 则 A 是零矩阵.

2013-2014 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）映射 $T:\mathbf{R^3}\to\mathbf{R^2}$ 由 $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+3x_2-x_3,x_1+x_3)$ 定义.

(1) 证明 T 是线性映射.

(2) 给出 T 关于 $\mathbf{R^3}$ 和 $\mathbf{R^2}$ 的标准基的矩阵表示.

(3) 给出 T 的核 $\ker(T)$ 的一组基.

二、（10 分）记 $V=\{f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}|f$ 可导 $\}$，即 V 是由实数导自身的全体可导函数所构成的集合.

(1) 试给出 V 上加法和数乘运算，使 V 成为实线性空间，并写出 V 中的零向量.

(2) 记 $S=\{f_1,f_2,f_3\}$，其中

$$f_1(x)=x;f_2(x)=\sin x;f_3(x)=e^x,\forall x\in\mathbf{R}.$$

证明 S 是 V 的线性无关子集.

三、（10 分）设 (,) 是实线性空间 V 的内积，$B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ 是 V 的一组单位正交基.

(1) 证明：对任意的 $x,y\in V$，有 $(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}(x,v_i)(y,v_i)$.

(2) 设 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^iv_i$ 和 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}v_i$ 的夹角是 θ，求 $\cos\theta$，并指出 x 和 y 是否正交.

四、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维实线性空间 $\mathbf{R^4}$ 的列向量，已知 4 阶行列式 $|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)|=d_1,|(\beta_2,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)|=d_2$. 求下面 4 阶方阵的行列式.

(1) $A=(3\alpha_1-100\alpha_2,7\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$.

(2) $B=(5\beta_1+6\beta_2,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

五、（10 分）设域 $\mathbf{F}$ 上 n 维线性空间 V 的非零向量都是线性映射 $T:V\to V$ 的特征向量.

(1) 证明 T 是数乘映射，即存在 $\lambda\in\mathbf{F}$，使得对于任何 $v\in V$，有 $T(v)=\lambda v$.

(2) 给出 T 的秩和零度 (T 的零度 $=\dim(\ker(T))$).

六、（10 分）令 $A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&1&0\\1&x&y\end{pmatrix}$，其特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^3+\lambda+2$.

(1) 求 x 和 y 的值.

(2) 若将 A 看作实矩阵，A 是否可对角化？为什么？

(3) 若将 A 看作复矩阵，A 是否可对角化？为什么？

七、（10 分）设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵.

(1) 设 $\lambda \neq 0$. 证明 λ 是 $m \times m$ 矩阵 AB 的特征值当且仅当 λ 是 $n \times n$ 矩阵 BA 的特征值.

(2) 证明 $I_m - AB$ 是可逆矩阵当且仅当 $I_n - BA$ 是可逆矩阵 (I_m 是 m 阶单位矩阵，I_n 是 n 阶单位矩阵).

八、（10 分）设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

(1) 求实对称矩阵 A，使 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A(x_1, x_2, x_3)^{\mathbf{T}}$.

(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{\mathbf{T}}AP$ 是 A 的相合规范形.

(3) 给出 f 的正惯性指数和负惯性指数，并指出 f 是否正定或负定.

九、（20 分）判断下面命题的真伪. 若它是真命题，给出一个简单证明；若它是伪命题，举一个具体的反例将它否定.

(1) 域 $\mathbf{F}$ 上所有 n 阶不可逆方阵所构成的集合是 n 阶矩阵空间 $M_n(\mathbf{F})$ 的子空间.

(2) 对称矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 也是对称矩阵.

(3) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，I_m 是 m 阶单位阵，$B = (A|I_m)$ 是 A 的增广矩阵，则 B 的秩 $r(B) = m$.

(4) 若 $\dim(V) = n, \dim(W) = m$，且 $n < m$，则任何线性映射 $T : V \to W$ 都不可能是满射.

2014-2015 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求过点 $(2,0,-1)$ 且垂直于平面 $x+2y-z=1$ 的直线标准方程和参数方程，以及该直线方向矢量的方向余弦.

二、（10 分）求参数 a, b 的值，使得 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}=1$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}=2$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & b \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}=a$ 都成立，并求 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 5 \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

三、（10 分）计算矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}^n$，其中 n 是自然数.

四、（10 分）设 W 是线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+3x_4=0 \end{cases}$ 的解空间，求 W 的一组单位正交基，并将其扩充成 $\mathbf{R}^4$ 的单位正交基，这里 $\mathbf{R}$ 是实数域.

五、（10 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性空间 V 的一组基，$T\in\mathcal{L}(V)$，且 $T(\alpha_1)=\alpha_1+\alpha_2$，$T(\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2$，$T(\alpha_3)=\alpha_1+2\alpha_2$. 求 T 的像空间和核空间，以及 T 的秩.

六、（10 分）设 T 是次数小于等于 2 的实多项式线性空间 V 上的变换，对任意 $f(x)\in V$，定义

$$T(f(x))=\frac{\mathrm{d}((x-2)f(x))}{\mathrm{d}x}.$$

证明 T 是 V 上的线性变换，并求 T 的特征值以及对应的特征子空间.

七、（10 分）设在 $\mathbf{F}[x]_3$ 中有两组基：

$$(A)\alpha_1=1-x,\alpha_2=-x+x^2,\alpha_3=3x-2x^2;$$

$$(B)\beta_1=4x+5x^2,\beta_2=-1,\beta_3=3x+4x^2.$$

(1) 求基 (A) 到基 (B) 的过渡矩阵；

(2) 设 α 在基 (A) 下的坐标为 $(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，求 α 在基 (B) 下的坐标.

八、 (10 分)已知实对称矩阵 A 有两个特征值 1 和 -1, 对应的特征向量分别是 $(1,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $(1,\ 1,\ -2)^{\mathrm{T}}$, 假如该矩阵与对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,\ 2,\ -1)$ 相似, 求 A^n, 其中 n 为自然数.

九、 (20 分) 判断下列命题的真伪, 若它是真命题, 请给出简单的证明; 若它是伪命题, 给出理由或举反例将它否定.

(1) 设 A 和 B 都是正定矩阵, 那么矩阵 AB 也是正定矩阵;

(2) 设 A 和 B 都是可逆矩阵, 那么矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & C \end{pmatrix}$ 也是可逆矩阵;

(3) 若 M 表示区间 $[0,\ 1]$ 上所有可积实值函数全体关于通常函数加法和数乘所构成的实线性空间, 在 M 上定义 $(f(x),\ g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$, 那么 M 关于该运算成为欧氏空间;

(4) 对任何 $m \times n$ 实矩阵 A 和实列向量 b, 方程组 $A^{\mathrm{T}}AX = A^{\mathrm{T}}b$ 总有解.

2018-2019 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）设 $\mathbf{R}[x]_4$ 是数域 $\mathbf{R}$ 上次数小于 4 的多项式所构成的线性空间 (约定零多项式次数为 $-\infty$). $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 是 $\mathbf{R}$ 上 2 阶方阵所构成的线性空间，定义 $T:\mathbf{R}[x]_4\to\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ 如下，对 $f(x)\in\mathbf{R}[x]_4$，

$$T(f(x))=\begin{pmatrix} f(0) & f(1)\\ f(-1) & f(0)\end{pmatrix}.$$

(1) 求出 T 的核空间 $N(T)$ 和像空间 $R(T)$；

(2) 验证关于 T 的维数公式.

二、（10 分）已知矩阵 A 与 $B=\begin{pmatrix}2&8&6&5\\0&0&3&2\\0&0&1&7\\0&0&0&9\end{pmatrix}$ 相似，求：

(1) 行列式 $|A^2-9A+4E_4|$ 的值；

(2) $r(A^*)+r(9E_4-A)$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

三、（10 分）设 $\mathbf{R}^4$ 是 4 维欧氏空间（标准内积），$\alpha=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$，$\beta=(-1,\ -1,\ 0,\ 2)$，$\gamma=(1,\ -1,\ 0,\ 0)\in\mathbf{R}^4$，求：

(1) 与 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 都正交的一个单位向量 δ；

(2) $||\alpha+\beta+\gamma+\delta||$.

四、（10 分）设实二次型 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，二次型对应的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

(1) 求参数 $a,\ b$；

(2) 用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换及标准形；

(3) 判断此二次型是否是正定二次型.

五、（10 分）设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个秩为 r 的 n 阶方阵，β 是一个 n 维非零列向量，X_0 是线性方程组 $AX=\beta$ 的一个解，$X_1,\ \ldots,\ X_s$ 是它的导出组 $AX=0$ 的一组线性无关解.

(1) 证明：向量组 $\{X_0,X_1,\ \ldots,\ X_s\}$ 线性无关；

(2) 求出包含 $AX=\beta$ 解集的最小线性空间 W（需写出基和维数）.

六、(10 分) 线性变换 $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 的定义是:

$$T(x_1,\ x_2,\ x_3)=(4x_1+x_3,\ 2x_1+3x_2+2x_3,\ x_1+4x_3).$$

(1) 求出 T 的特征多项式及特征值;

(2) 判断 T 是否可对角化，并给出理由.

七、(10 分) 设 $A\in M_{m\times n}(\mathbf{F})$，$r(A)=r$，$k$ 是满足条件 $r\leqslant k\leqslant n$ 的任意整数，证明存在 n 阶方阵 B，使得 $AB=0$，且 $r(A)+r(B)=k$.

八、(10 分) 设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上一个 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，$\alpha_1\in\mathbf{F}^n$ 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s$ 按如下方式产生: $(A-\lambda E)\alpha_{i+1}=\alpha_i(i=1,\ 2,\ \ldots,\ s-1)$. 证明向量组 $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_s\}$ 线性无关.

九、(20 分) 判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-5A+5E_n=0$，则对所有的有理数 r，$A+rE_n$ 都是可逆阵;

(2) 在 5 维欧氏空间 V 中，存在两组线性无关向量 $S_1=\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ 和 $S_2=\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$，使其满足内积 $(v_i,\ w_j)=0\ (1\leqslant i,\ j\leqslant 3)$;

(3) 不存在 2 阶方阵 A 使得 $r(A)+r(A^*)=3$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵;

(4) 设 n 阶方阵 A 的每一行元素之和是 10，则 $2A^3+A+9E_n$ 的每一行元素之和是 2019.

2019-2020 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）设 $D=|a_{ij}|=\begin{vmatrix}3&6&9&12\\2&4&6&8\\1&2&0&3\\5&6&4&3\end{vmatrix}$，求 $A_{41}+2A_{42}+3A_{44}$，这里 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

二、（10 分）设 $A\in M_{m\times s}(\mathbf{R})$，且 $r(A)=r$，证明：存在矩阵 $B\in M_{s\times n}(\mathbf{R})$，且 $r(B)=\min\{s-r,\ n\}$，使得 $AB=0$.

三、（10 分）设 α 为 $\mathbf{R}^3$ 中的非零向量，$\sigma(x)=(x,\ \alpha)\alpha$，这里 $(\cdot\ ,\ \cdot)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的标准内积.

(1) 证明：σ 为 $\mathbf{R}^3$ 上的线性变换，并求其像空间；

(2) 设 $\alpha=(1,\ 0,\ -2)$，分别求 σ 在基 $\mathbf{B}_1=\{(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\}$ 和 $\mathbf{B}_2=\{(1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0)\}$ 下的矩阵.

四、（10 分）

(1) 设 A 为 n 阶矩阵且 $E-A$ 可逆，证明：A 与 $(E-A)^{-1}$ 相乘可交换；

(2) 设 A 为 n 阶实反对称矩阵且 $E+A$ 可逆，证明：$(E-A)(E+A)^{-1}$ 为正交矩阵，且 -1 不为其特征值.

五、（10 分）已知 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的一组基础解系，向量组

$$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\ \beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\ \ldots,\ \beta_{s-1}=t_1\alpha_{s-1}+t_2\alpha_s$$

试问当实数 t_1,t_2 满足何条件时，$AX=\mathbf{0}$ 有基础解系包含向量 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s-1}$，并写出该基础解系中的其余向量.

六、（15 分）已知二次型 $X^{\mathrm{T}}AX=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 用正交变换 $X=QY$ 将 $X^{\mathrm{T}}AX$ 化为标准形，给出 Q，并求二次型的正、负惯性指数.

七、（15 分）记 $X=\left\{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\in M_{3\times3}(\mathrm{R})\,\middle|\,\sum\limits_{j=1}^{3}a_{1j}=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{2j}=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{3j}=\sum\limits_{j=1}^{3}a_{jj}\right\}$，证明：

(1) X 是 $M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ 的一个子空间，并求该子空间的维数；

(2) 对任意可逆矩阵 $A \in X$，$(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 和 A^{-1} 的特征向量；

(3) 对任意可逆矩阵 $A \in X$，$A^{-1} \in X$.

八、(20 分) 判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 设 A_1，A_2，$\ldots$，A_{n+1} 是任意 $n+1$ 个 n 阶矩阵，必存在不全为 0 的实数 λ_1，λ_2，$\ldots$，λ_{n+1}，使得矩阵 $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_{n+1} A_{n+1}$ 不可逆；

(2) 复数集 $\mathbf{C}$ 关于复数的加法与复数的乘法构成的复数域上的线性空间与 $\mathbf{C}^2$ 同构；

(3) 设 $x \in \mathbf{R}^n$，对任意 $\lambda \in \mathbf{R}$，$E + \lambda x x^{\mathrm{T}}$ 为正定矩阵；

(4) 若 A, B 为 n 阶上三角矩阵，且对角线上元素都相同，则 A 与 B 相似.

2021-2022 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（12 分）定义实数域上的线性空间 $\mathbf{R}^n$ 到自身的映射 T 如下：

$$\forall X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\ T(X)=(x_1-x_2,x_2-x_3,\ldots,x_{n-1}-x_n,x_n-x_1).$$

(1) 验证 $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$；

(2) 求 T 的像空间，和 T 核空间的维数.

二、（12 分）设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&2&1&0\\3&3&0&-1\\1&1&2&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

求线性方程组 $AX=b$ 的一般解.

三、（12 分）设三元二次齐次实多项式如下：

$$f(x,y,z)=x^2+2xy+y^2-6yz-4xz.$$

(1) 求实对称矩阵 A，使得 $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$；

(2) 求一个与 A 合同的对角矩阵；

(3) 求 $f(x,y,z)$ 的正惯性指数和负惯性指数.

四、（12 分）设 $V=\mathbf{R}^{4\times1}$，$W=\mathbf{R}^{3\times1}$，定义映射 $T:V\to W$ 如下：

$$T(X)=AX=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\1&1&2&3\\2&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ \forall X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in V.$$

(1) 证明 T 的秩为 3；

(2) 求 V 和 $\operatorname{im}T$ 的基 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4\}$ 和 $\{\eta_1,\eta_2\}$，使得

$$T(\varepsilon_1)=\eta_1,T(\varepsilon_2)=\eta_2,T(\varepsilon_3)=T(\varepsilon_4)=(0,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

五、（12 分）设 $V=\mathbb{R}^{2\times2}$ 是按矩阵加法和数乘构成的实数域上的线性空间.

(1) 验证下列向量组构成 V 的一组基：

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\};$$

(2) 在 V 上定义运算

$$\sigma\left((a_{ij})_{2\times 2}, (b_{ij})_{2\times 2}\right) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

验证 σ 是 V 上一个内积，使得 V 成为一个欧氏空间；

(3) 将 Schmidt 正交化过程用于 B 求出 V 的一组单位正交基.

六、（8 分）求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的所有特征值，对应的特征子空间，以及与 A 相似的一个对角矩阵.

七、（16 分）设 $V = \mathbb{R}^3$ 是具有自然内积的欧氏空间，$T \in L(V)$. 设

$$\alpha_1 = (1,2,0),\ \alpha_2 = (0,1,2),\ \alpha_3 = (2,0,1);$$

$$T(\alpha_1) = -(1,0,2),\ T(\alpha_2) = -(2,1,0),\ T(\alpha_3) = -(0,2,1).$$

(1) 求 T 关于 V 的自然基的矩阵；

(2) 证明 T 是一个正交变换；

(3) 证明 T 是一个镜面反射变换.（存在 V 的单位正交基 $\{\eta,\ \beta,\ \gamma\}$ 使得 $T(\eta) = -\eta$, $T(\beta) = \beta$, $T(\gamma) = \gamma$，或等价地，存在单位向量 η 使得 $T(\alpha) = \alpha - 2(\alpha,\ \eta)\eta$, $\forall \alpha \in V$）

八、（16 分）判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 设 A 是实数域上 $m \times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^TA\right) = r(A)$；

(2) 设 A 是复数域上 $m \times n$ 阶矩阵，则矩阵秩 $r\left(A^TA\right) = r(A)$；

(3) 设 V, W 是数域 F 上的线性空间，则 $V \cup W$ 是线性空间；

(4) 实矩阵的下列性质有其二必有其三：

i. $A^T = A$;

ii. $A^TA = E$（单位矩阵）；

iii. $A^2 = E$.

2022-2023 学年线性代数 I（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（10 分）求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

在 k 为多少时有解，并求出一般解.

二、（10 分）给定二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$，请将其化为标准型，并求出此时的线性变换矩阵，以及该二次型的正、负惯性指数.

三、（10 分）已知三阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求 A.

四、（10 分）设 $A \in \mathbf{R}^{p\times m}, B \in \mathbf{R}^{m\times n}, r(A) = r, r(B) = s, r(AB) = t$. 令 $V = \{X \in \mathbf{R}^n \mid ABX = 0\}, W = \{Y \in \mathbf{R}^m \mid Y = BX, X \in V\}$.

(1) 证明 V 是 $\mathbf{R}^n$ 上的子空间，W 是 $\mathbf{R}^m$ 上的子空间.

(2) 求 $\dim V, \dim W$.

五、（10 分）设三阶矩阵 A，满足 $|A - E| = |A - 2E| = |A + E| = 0$.

(1) 求 A 的所有特征值.

(2) 求 $|A + 3E|$.

六、（15 分）

(1) 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A) = r$，证明：存在可逆的矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 的后 $n - r$ 列均为 0.

(2) 设 A 为 n 阶矩阵，满足 $r(A) = 1$，A 主对角线上元素之和为 1，证明：$A^2 = A$.

七、（15 分）定义 $\mathbf{R}_3[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$. 设 $\mathbf{R}_3[x]$ 对 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的映射 σ 满足：

$$\sigma(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) - p(2) & 0 \\ 0 & p(0) \end{pmatrix}$$

(1) 证明：σ 为线性映射.

(2) 试分别写出 $\mathbf{R}_3[x], \mathbf{R}^{2\times 2}$ 上的两组基 B_1, B_2，并求出 σ 关于这两组基的矩阵.

(3) 求 $\mathrm{Im}\sigma, \ker\sigma$.

(4) 分别给出 $\mathbf{R}_3[x]$ 的一个与 $\mathrm{Im}\sigma$ 同构的子空间，和 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的一个与 $\mathrm{Ker}\sigma$ 同构的子空间.

八、(20 分) 判断下列命题的真伪，若它是真命题，请给出简单的证明；若它是伪命题，给出理由或举反例将它否定.

(1) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 的秩大于 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 的秩，则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 线性无关；

(2) 设 U, V, W 为 V_0 关于数域 F 的线性空间，若 $U+V=U+W$，则 $V=W$；

(3) 任意不为 0 矩阵的二阶矩阵可以表示为若干初等矩阵的乘积；

(4) 若 A, B 相似或者相合，则 A, B 相抵.

线性代数 II（H）期中/小测历年卷试题集

2020-2021 学年线性代数 II（H）期中

任课老师：刘康生　　　　考试时长：60 分钟

一、 设 $V=\mathbf{R}^{2\times 2}$，$W=\mathbf{R}^{3\times 2}$，$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 由下面的矩阵乘法定义：

$$T(A)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&0\end{pmatrix}A,\ \forall A\in V.$$

(1) 求 T 的像空间与核空间；

(2) 求 V 和 W 的一组基，使得 T 在这两组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{6\times 4}$，其中 E_r 为 r 阶单位矩阵，$r=\dim\operatorname{im}T$.

二、 设 $V=\mathbf{R}^3$，$U=\{(x_1,x_2,x_3)\in V\mid x_1+x_2+x_3=0\}$，$\alpha_1=(1,1,1)$，求 $f\in V'$ 使得

$$f(\alpha_1)=1,f(\alpha)=0,\forall\alpha\in U.$$

三、 设 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足 $A^2=A$，证明：存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n},$$

其中 r 为 A 的秩.

2020-2021 学年线性代数 II（H）小测

任课老师：刘康生　　　　考试时长：45 分钟

一、 叙述复内积空间上正规变换的等价刻画（越多越好）.

二、 叙述实内积空间上正规变换的等价刻画（越多越好）.

三、 设 $T, S \in \mathcal{L}(V)$，V 是内积空间，且满足 $||Tv|| = ||Sv||$，$\forall v \in V$. 问是否存在等距同构 $U \in \mathcal{L}(V)$，使得 $T = US$? 若存在，证明之；若不存在，举反例.

四、 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 验证 A 是正规的；

(2) 求实正交矩阵 P 使得

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2020-2021 学年线性代数 II（H）期中

任课老师：谈之奕　　　　考试时长：90 分钟

一、（10 分）设 $g(x)=ax+b$，$a,b\in\mathbf{F}$，$a\neq 0$，$f(x)\in\mathbf{F}[x]$，证明：$g(x)$ 是 $f^2(x)$ 的因式的充要条件是 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式.

二、（10 分）设 λ 是 n 阶实矩阵 A 的特征值，$\lambda^3=1$ 且 $\lambda\notin\mathbf{R}$，A 的极小多项式次数为 2，证明：矩阵 $A+I$ 可逆.

三、（15 分）设算子 T 的特征值仅为 1，代数重数为 5，几何重数为 3，求 T 的所有可能的若当标准形及相应的极小多项式.

四、（20 分）设 V 为 n 维复向量空间，$T\in L(V)$，T 在 V 的一组基 $e_1,e_2,\ldots,e_n$ 下的矩阵为对角矩阵 $\mathrm{diag}\{d_1,\ldots,d_n\}$，且 $d_i\neq d_j(i\neq j)$.

(1) 求 T 的所有一维不变子空间；

(2) 求 T 的所有不变子空间.

五、（20 分）设 V 为 n 维复向量空间，$S,T\in L(V)$，$ST=TS$，则

(1) S,T 至少有一个公共的特征向量；

(2) 存在 V 的一组基，使得 S 和 T 在此基下的矩阵均为上三角矩阵.

六、（25 分）设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\-2&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}$，求 A 的若当标准形 J 和矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=J$.

2022-2023 学年线性代数 II（H）期中

任课老师：刘康生　　　　考试时长：45 分钟

注：上午班考察 1-3 题，下午班考察 2-4 题

一、 设 $V=\mathbf{R}[x]_4$（即次数不超过 4 的实系数多项式全体构成的线性空间），$T\in\mathcal{L}(V)$，T' 是 T 的对偶映射. 已知 $\ker T'=\operatorname{span}(\varphi)$，$\varphi\in V'$，$\varphi(p)=p(18)$，$\forall p\in V$. 求 $\operatorname{im}T$.

二、 设 e_1,e_2,e_3,e_4 是欧式空间 $\mathbf{R}^4$ 的标准正交基，设 $\alpha_1=e_1-e_2,\alpha_2=e_2-e_3,\alpha_3=e_3-e_4,\beta_1=e_4,\beta_2=e_1+e_2+e_3,\beta_3=e_4-e_1-2e_2-3e_3$. 求 $w\in\mathbf{R}^4$ 使得 $\langle\alpha_j,w\rangle<0$ 且 $\langle\beta_j,w\rangle>0$，$j=1,2,3$.

三、 已知平面方程

$$\pi_1: x-2y+2z+d=0,\ \ \pi_2: -2x+4y+cz+1=0.$$

分别求 c，d 使分别满足

(1) π_1 与 π_2 平行；

(2) π_1 与 π_2 重合；

(3) π_1 与 π_2 垂直；

(4) π_1 与 π_2 相交，并求交线的参数方程；

(5) 原点到交线的最短距离为 1.

四、 对 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^n$，定义 1 范数为 $||x||_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$.

(1) 求 A 关于 1 范数的矩阵范数，即 $||A||_1=\max\{||AX||_1\mid||X||_1=1\}$；

(2) 已知 $B=(b_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$|a_{ij}|\leqslant b_{ij}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$. 证明：对任何正整数 m，有 $||A^m||_1\leqslant||B^m||_1$；

(3) 设 $|a_{ii}|<1$，$1\leqslant i\leqslant n$，$a_{ij}=0(i>j)$. 证明：$||A^m||_1\to 0(m\to\infty)$.(提示：若 $a_{ij}=0(i>j)$，则 $A^n=O$)

2022-2023 学年线性代数 II（H）期中

任课老师：吴志祥　　　　　考试时长：90 分钟

一、（15 分）求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个互相垂直的平面 π_1 和 π_2，使 π_1 过点 $(4,-3,1)$.

二、（15 分）求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离.

三、（15 分）设 $\mathbf{R}[X]$ 是实系数多项式构成的线性空间，令 $W=\{(x^3+x^2+1)h(x)\mid h(x)\in\mathbf{R}[x]\}$.

(1) 证明：W 是 $\mathbf{R}[x]$ 的子空间；

(2) 求 $\mathbf{R}[x]/W$ 的一组基和维数.

四、（15 分）设 V 和 W 是数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，$V_1,V_2,\ldots,V_n$ 是 V 的 n 个子空间且 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_n$. 证明：$\mathcal{L}(V,W)$ 和 $\mathcal{L}(V_1,W)\times\mathcal{L}(V_2,W)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_n,W)$ 同构.

五、（10 分）设 V 是一个有限维线性空间，$T\in\mathcal{L}(V)$ 是同构映射，记其逆映射为 T^{-1}. 设 W 是 T 的不变子空间，证明：W 是 T^{-1} 的不变子空间.

六、（15 分）设 $M_n(\mathbf{C})$ 是 n 阶复矩阵全体构成的线性空间，$U=\{A\in M_n(\mathbf{C})\mid A^{\mathrm{T}}=A\},W=\{B\in M_n(\mathbf{C})\mid B^{\mathrm{T}}=-B\}$. 在 $M_n(\mathbf{C})$ 上定义二元映射 $\langle,\rangle:M_n(\mathbf{C})\times M_n(\mathbf{C})\to\mathbf{C}$，使得对于任意的 $A,B\in M_n(\mathbf{C})$，有 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB^{\mathrm{H}})$，其中 B^{H} 表示 B 的共轭转置矩阵.

(1) 证明：$(M_n(\mathbf{C}),\langle\rangle)$ 是复内积空间；

(2) 证明：$U=W^{\perp}$；

(3) 设 $A\in M_n(\mathbf{C})$，试求 $B\in U$ 使得 $\forall D\in U$，有 $||A-B||\leqslant||A-D||$，其中 $||A||=\sqrt{\langle A,A\rangle}$.

七、（15 分）设 $\mathbf{R}[x]_3$ 是由次数小于 3 的实系数多项式构成的线性空间. 对于 $g(x)\in\mathbf{R}[x]_3$，定义 $f_1(g(x))=\int_0^1 g(x)dx$，$f_2(g(x))=\int_0^2 g(x)dx$，$f_3(g(x))=\int_0^{-1} g(x)dx$.

(1) 证明：f_1,f_2,f_3 是 $\mathbf{R}[x]_3$ 对偶空间的一组基；

(2) 求 $\mathbf{R}[x]_3$ 的一组基 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$，使得 f_1,f_2,f_3 是 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$ 的对偶基.

线性代数 II（H）期末历年卷试题集

2022-2023 学年线性代数 II（H）期末考前练习

任课老师：刘康生　　　　　考试时长：无

一、 A 是复（实）正规矩阵的充要条件是：存在复（实）矩阵 S_1, S_2 满足 $\overline{S_1}^{\mathrm{T}} = S_1$，$\overline{S_2}^{\mathrm{T}} = -S_2$，$S_1S_2 = S_2S_1$，$A = S_1 + S_2$. 另外，$A$ 的如上分解是唯一的.

二、 证明：A 是实正规矩阵的充要条件是存在镜面映像 $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ 使得

$$A^{\mathrm{T}} = \pi_t \cdots \pi_2 \pi_1 A.$$

三、 将如下 $\mathbf{R}^3$ 上变换 T 表示为两个镜面映像之积：

T：先绕 x 轴旋转 φ 角度，再绕 z 轴旋转 θ 角度（右手系，$0 < \varphi, \theta < \dfrac{\pi}{2}$）.

四、 求下列变换的所有不变子空间：

(1) $\sigma_A \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$；

(2) $T \in \mathcal{L}(V)$，$\dim V = n$，$T^n = O$，$T^{n-1} \neq O$；

(3) $\sigma \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^5)$，$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\det(\lambda E - A) = \lambda^2(\lambda - 1)^3$.

五、 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，证明：不存在复矩阵 B 使得 $B^2 = A$.

六、 已知 $\alpha_1 = (1,2,0)$，$\alpha_2 = (0,1,2)$，$\alpha_3 = (2,0,1) \in \mathbf{R}^3$. 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$，且有 $T(\alpha_1) = (-1,0,-2)$，$T(\alpha_2) = (-2,-1,0)$，$T(\alpha_3) = (0,-2,-1)$. 证明：T 是一个镜面映像.

七、 定义在 $V = \mathbf{R}^3$ 上的运算

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_V = a(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + bx_2y_2 + x_3y_3 (a, b > 0).$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

(1) 验证 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个内积;

(2) 求 $\mathbf{R}^3$ 在 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 下的一组标准正交基;

(3) 求 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 使得 $\forall \boldsymbol{x} \in V : x_1 + x_2 + x_3 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta} \rangle_V$.

八、 考虑二直线

$$l_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t - 1 \\ z = 3t \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} ax + 2y + z = 0 \\ x - y - z + d = 0, \end{cases}$$

求 a，d 满足的条件，使得二直线

(1) 平行;

(2) 重合;

(3) 相交;

(4) 异面.

2022-2023 学年线性代数 II（H）期末

任课老师：统一命卷　　　　考试时长：120 分钟

一、（15 分）已知 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^3)$，其对应矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2023 & 0 & 0 \\ 6 & 28 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的 Jordan 标准形（不必求 Jordan 基）；

(2) 证明不存在复矩阵 B 使得 $B^2 = A$.

二、（15 分）已知直线 $L_1 = \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases}$，$L_2 = \begin{cases} x=2t \\ y=t+a \\ z=bt+1 \end{cases}$，试确定 a，b 满足的条件使得 L_1，L_2 是：

(1) 平行直线;

(2) 异面直线.

三、（18 分）定义在 $V = \mathbf{R}^3$ 上的运算

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_V = x_1y_1 + x_2y_2 + (x_2+x_3)(y_2+y_3)$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

(1) 验证 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的一个内积;

(2) 求 $\mathbf{R}^3$ 在 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ 下的一组标准正交基;

(3) 求 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 使得 $\forall \boldsymbol{x} \in V : x_1 + 2x_2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta} \rangle_V$.

四、（15 分）$T \in \mathcal{L}(V)$ 在一组基 $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 下的矩阵为

$$T(\boldsymbol{\varepsilon}) = (\boldsymbol{\varepsilon}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 V 所有的 T-不变子空间.

五、（20 分）试给出下列命题的真伪. 若命题为真，请给出简要证明；若命题为假，请举出反例.

(1) $T \in \mathcal{L}(V)$. 若子空间 $W \in V$ 在 T 下不变，则其补空间 W' 在 T 下也不变；

(2) 定义 $T \in \mathcal{L}(V,W)$: $Tv = \langle v, \alpha \rangle \beta$, $\beta \in W$ 对 $\forall v \in V$ 成立，则 $T^*w = \langle w, \beta \rangle \alpha$, $\alpha \in V$ 对 $\forall w \in W$ 成立；

(3) $T \in \mathcal{L}(V)$ 是非幂零算子，满足 $\operatorname{null} T^{n-1} \neq \operatorname{null} T^{n-2}$. 则其极小多项式为

$$m(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - a) 0 \neq a \in \mathbf{R}$$

(4) $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. $S_1 = A^{\mathrm{T}} + A$, $S_2 = A^{\mathrm{T}} - A$. 则 A 是正规矩阵当且仅当 $S_1 S_2 = S_2 S_1$.

(5) $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 是正规矩阵，则 A 的实部矩阵和虚部矩阵是对称矩阵.

六、（15 分）$T \in \mathcal{L}(V)$. 有极分解 $T = S\sqrt{G}$，其中 S 是等距同构，$G = T^*T$. 证明以下条件等价：

(1) T 是正规算子；

(2) $GS = SG$；

(3) G 的所有特征空间 $E(\lambda, G)$ 都是 S-不变的.